

Exponente de cancelación en flujos turbulentos rotantes

Ernesto Horne

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Julio 2012

TEMA: Turbulencia en fluidos incompresibles.

ALUMNO: Ernesto Horne **LU:** 622/05

LUGAR DE TRABAJO: Depto. de Física. FCEN. UBA.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Mininni.

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2011

FECHA DE FINALIZACION: Julio de 2012

FECHA DE EXAMEN: Agosto de 2012

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En un flujo turbulento la intermitencia está relacionada con la presencia de estructuras localizadas en distintas escalas. La proximidad o lejanía de dichas estructuras puede llevar a rápidas variaciones en las derivadas del campo, y también a rápidos cambios de signo. En este trabajo, para poder estudiar la variación en el signo de una magnitud en distintas escalas en un flujo turbulento rotante utilizamos el exponente de cancelación. Utilizamos datos del campo de velocidad provistos por simulaciones numéricas directas con dos tipos de mecanismos forzados distintos: Arnold-Beltrami-Childress (ABC) y de Taylor-Green (TG), con resoluciones espaciales lineales de 256, 512 y 1536 puntos de grilla, con números de Reynolds entre 1100 y 5100 y números de Rossby entre 0,06 y 10. El cálculo del exponente de cancelación para las tres componentes cartesianas del campo de velocidad y de la vorticidad, y para la helicidad se realizó usando un código paralelo desarrollado para este trabajo.

En las simulaciones donde la rotación es nula o despreciable encontramos que el rango en el cual las componentes del campo de velocidad y vorticidad satisfacen una ley de potencias es pequeño comparado con el rango en el cual el espectro de energía es compatible con un rango inercial, por lo que no podemos decir que sean singular de signo. Por otro lado, en las simulaciones con rotación observamos una ley de escalas en la componente vertical del campo de velocidad y vorticidad, y comprobamos que sus leyes de escala son las mismas. Encontramos que la helicidad también satisface una ley de escalas para las simulaciones con y sin rotación; este resultado condice con el hecho de que la helicidad se conserva en el rango inercial y en el límite $Re \rightarrow \infty$ es un invariante de las ecuaciones de movimiento.

Considerando las simetrías de los flujos rotantes calculamos el exponente de cancelación para la componente vertical del campo de velocidad y vorticidad promediadas en la dirección paralela al eje de rotación. Observamos que para todas las simulaciones el valor del exponente de cancelación coincide con los obtenidos para las componentes en volumen, y es nuevamente el mismo para la velocidad y la vorticidad. Esto puede explicarse considerando que en presencia de rotación, el flujo se vuelve fuertemente anisótropo, y en el límite de rotación fuerte las componentes verticales de la velocidad y la vorticidad son advectadas como escalares pasivos.

Agradecimientos

Quisiera agradecer enormemente a mi director de tesis Pablo Mininni, por guiarme en todas mis dudas e inquietudes, brindarme las herramientas necesarias para enfrentar problemáticas científicas y por estar siempre dispuesto conmigo. Además quiero resaltar el apoyo que me dio en decisiones que exceden el marco formal de ésta tesis.

Quiero darle las gracias al Grupo de Plasmas Astrofísicos por las horas de cálculo utilizadas en los clusters del grupo.

También agradezco al departamento de física por brindarme una formación que considero me acompañará por mucho tiempo.

Agradezco a mi familia que desde los comienzos de mis estudios y siempre me impulso a que concrete mis deseos y metas.

Gracias a todos mis amigos por su placentera compañía durante la etapa de mi carrera, al Gauchito y a todos los que estuvieron y estarán.

Índice general

Resumen	1
Agradecimientos	3
1. Introducción	6
2. Turbulencia	9
2.1. Turbulencia isótropa y homogénea	9
2.1.1. Simetrías y conservación	10
2.1.2. Funciones de estructura	14
2.2. Teoría de Kolmogorov de 1941	15
2.2.1. Introducción	15
2.2.2. Rango inercial	15
2.2.3. Fenomenología de la turbulencia	17
2.2.4. Hipótesis de la teoría	18
2.2.5. Ley de los 4/5	18
2.2.6. Principales resultados de la teoría de Kolmogorov . . .	19
2.2.7. Limitaciones de la teoría de Kolmogorov e intermitencia	20
2.3. Turbulencia rotante	20
2.3.1. Teoría de ondas resonantes y ecuación promedio	21
2.3.2. Espectro de la turbulencia rotante	24
3. Herramientas y métodos	26
3.1. Simulaciones numéricas directas	26
3.1.1. Evolución temporal: Runge-Kutta	27
3.1.2. Evolución espacial: Método pseudospectral	27
3.1.3. Ecuación de Burgers	29
3.1.4. Simulaciones y parámetros	30
3.2. Exponente de cancelación	31
3.2.1. Exponente de cancelación y dimensión de estructuras .	33
3.2.2. Caso tridimensional	34
3.2.3. Caso bidimensional y promedios verticales	37

4. Resultados	39
4.1. Simulaciones sin rotación	39
4.2. Simulaciones con rotación	47
4.3. Dependencia con el número de Reynolds	53
4.3.1. Simulaciones con helicidad	53
4.3.2. Simulaciones sin helicidad	55
4.4. Promedios verticales	58
5. Conclusiones	61
Referencias	64

Capítulo 1

Introducción

La dinámica de los fluidos incompresibles está descrita en forma completa por la ecuación de Navier-Stokes [21], en la cual compiten e interactúan procesos producidos por interacciones no-lineales, fricción interna, forzantes externos y condiciones de borde. El comportamiento del flujo será tan diverso como las diferentes formas en que se combinen los procesos naturales intrínsecos de la dinámica del fluido.

En particular, el estado turbulento, resultado del predominio de las interacciones no-lineales frente a la disipación viscosa, puede observarse en abundantes formas en la naturaleza, como por ejemplo en flujos geofísicos y astrofísicos. La razón entre la amplitud de estos dos procesos es descrita a través del número de Reynolds, el cual puede tomar valores tan grandes como $Re \approx 10^8$ o mayor en la atmósfera y en los océanos [58], y $Re \approx 10^{12}$ o mayor en flujos astrofísicos [56]. Estos fenómenos todavía no pueden ser simulados completamente por medio de simulaciones numéricas directas debido a la capacidad limitada de poder de cálculo de las supercomputadoras actuales [32]. Por lo cual se busca identificar características estadísticas del flujo turbulento a través de dos propiedades que lo definen: las leyes de escala y la intermitencia.

En un flujo turbulento, cantidades como la energía, la enstrofía y la helicidad suelen caracterizarse con espectros (o funciones de correlación) que siguen leyes de potencia. Así, ciertas magnitudes estadísticas del flujo son las mismas para diferentes longitudes de interés, salvo por un factor de escala. Esto nos da la posibilidad de comprender procesos en rangos de escalas mayores que las que podemos simular computacionalmente.

Sin embargo, los flujos turbulentos suelen también ser intermitentes [59]. Si un dado momento de la distribución de probabilidad de la velocidad del fluido es invariante de escala con un exponente de escala dado, los demás momentos (en general, de orden mayor) están caracterizados por exponentes

de escala que no pueden ser predichos trivialmente a partir del primero. En términos simples, al observar escalas cada vez más pequeñas, los flujos turbulentos tienen cada vez más probabilidad de desarrollar eventos muy energéticos localizados espacial y temporalmente. Este aumento de la probabilidad con la disminución de la escala resulta en una ruptura de la invariancia de escala perfecta, y en estadística no-Guassiana para las fluctuaciones de la velocidad.

La caracterización de estos eventos extremos es una parte importante del estudio de los flujos turbulentos. Mientras que existen muchas herramientas para caracterizar la intermitencia en flujos isótropos y homogéneos (la función de estructura por ejemplo) [19], en flujos anisótropos su estudio se encuentra menos desarrollado.

Un ejemplo importante de flujos anisótropos está dado por los flujos rotantes. Flujos de gran escala en la atmósfera y en los océanos se ven predominantemente afectados por la rotación de la tierra. La rotación, además, se presenta en muchos flujos de interés ingenieril [15]. La ruptura de la isotropía en un flujo a través de la rotación esta acompañada por un reordenamiento de la energía y de los campos de velocidad y vorticidad, el cual trataremos de identificar y explicar en este trabajo.

En esta tesis usaremos el exponente de cancelación para estudiar las leyes de escala y la intermitencia en flujos turbulentos. El mismo nos dará información sobre las variaciones rápidas en el signo de un campo para escalas arbitrariamente chicas [55].

La estructura de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2 introducimos fundamentos y nociones básicas para el entendimiento y descripción de los flujos turbulentos, explicando las formas en que se lo caracteriza. Se introduce brevemente la teoría de Kolmogorov (K41) desde una visión fenomenológica, se desarrollan sus resultados mas relevantes, y se introduce el concepto de intermitencia, necesario para entender algunas de las limitaciones de la teoría. Finalmente, presentamos algunas herramientas y extensiones de la teoría K41 necesarias para entender el comportamiento del caso anisótropo de la turbulencia en un sistema rotante. En el capítulo 3 describimos las herramientas y los métodos utilizados para la producción y el análisis de datos provenientes de simulaciones numéricas directas. Introducimos el exponente de cancelación y el procedimiento usado en esta tesis para el cálculo del mismo por medio de procesadores en paralelo. El capítulo 4 está dedicado a la exposición y análisis de los resultados obtenidos, comparando el exponente de cancelación y su ley de escala entre flujos isótropos y flujos rotantes. Dentro de este último estudiamos el ordenamiento del flujo y la existencia de leyes de escala debidas a la rotación, y contrastamos con la teoría de ondas para flujos rotantes a través de los campos promediados sobre el eje de rotación del

sistema. Finalmente presentamos las conclusiones del trabajo en el capítulo 6.

Capítulo 2

Turbulencia

En este capítulo introducimos conceptos básicos del estudio de la turbulencia que serán útiles en los capítulos siguientes. Explicaremos los elementos básicos de la dinámica de fluidos a través de la ecuación de Navier-Stokes, para luego describir la diferencia entre un flujo laminar y uno turbulento por medio del número de Reynolds y la existencia de simetrías en el flujo. Incluimos la definición de la función de estructuras que será fundamental al momento de presentar la teoría desarrollada en 1941 por Kolmogorov, la cual es una pieza fundamental en el entendimiento actual de la turbulencia. Finalmente, abordamos el caso de la turbulencia en un sistema rotante, que será tratado en gran parte de esta tesis.

2.1. Turbulencia isótropa y homogénea

El estudio de la dinámica de los fluidos es usualmente abordado desde la mecánica clásica, es decir, desde la mecánica Newtoniana. Los axiomas fundacionales de la dinámica de fluidos son las leyes de conservación. Consideraremos el fluido como un continuo de materia, a pesar de que estos están conformados por moléculas. La esencia de la aproximación al continuo yace en que la velocidad y otras propiedades del flujo puedan ser definidas como promedios sobre regiones del espacio e intervalos temporales que sean grandes comparadas con las del movimiento molecular, y pequeñas comparadas con escalas características del flujo continuo [6]. Nos interesaremos en los fluidos cuya razón de deformación es lineal con respecto al esfuerzo realizado sobre este, siendo esta relación definida como la viscosidad, los cuales son llamados fluidos newtonianos. La ecuación de Navier-Stokes surge de la conservación del momento de un fluido. En particular, para un fluido incompresible y homogéneo newtoniano es [44]

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidad, p la presión, \mathbf{f} las fuerzas externas y ν la denominada viscosidad cinemática definida como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y ρ su densidad. El segundo término de la izquierda en la ecuación se denomina término convectivo, mientras que el primer término de la derecha corresponde a los esfuerzos viscosos.

La diferencia entre un flujo laminar y uno turbulento está íntimamente relacionada con la competencia entre el término convectivo y el de esfuerzos viscosos. Adimensionalizando la ecuación de Navier-Stokes y escribiendo cada uno de sus términos a través de escalas características L , U y T , podemos ver que la razón entre los términos convectivo y viscoso es [18],

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (2.3)$$

que se conoce con el nombre de número de Reynolds. El mismo relaciona la transferencia de momento inercial con la transferencia de momento molecular.

Cuando el número de Reynolds es pequeño la viscosidad suaviza los gradientes en la velocidad, es decir, el fluido fluye en capas paralelas sin entremezclarse; a este estado del flujo se lo conoce como laminar. Cuando el número de Reynolds es grande, el movimiento es dominado por las no-linealidades, generando, entre otras cosas, movimiento en escalas más pequeñas que a su vez generan movimientos en escalas aún más pequeñas. Debido a que la generación de movimiento en escalas menores es multiplicativa y cada vez más rápida es que se conoce este proceso como cascada. El estado estadísticamente estacionario de la turbulencia incluye a la conjunción de todas estas escalas [21].

2.1.1. Simetrías y conservación

Se cree que la ecuación de Navier-Stokes contiene todas las características importantes de la turbulencia. Deberíamos poder obtener entonces a partir de esta misma todos los comportamientos posibles de un flujo, desde el estado laminar hasta el turbulento completamente desarrollado. Para estudiar los comportamientos intermedios se utiliza como parámetro de control el número de Reynolds. Con el fin de ilustrar el desarrollo de un flujo turbulento, nos centraremos en un ejemplo en particular [21], el caso de un flujo externo que incide sobre un cilindro como se muestra en la figura 2.1.

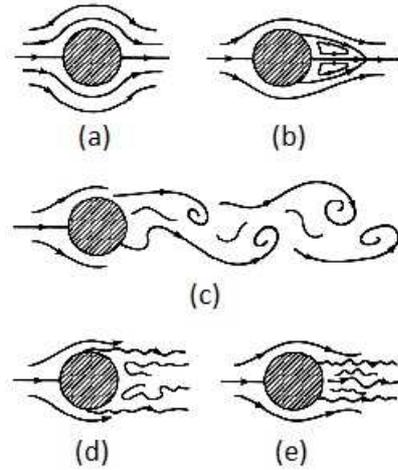


Figura 2.1: : Esquema que muestra el efecto de un flujo uniforme al incidir sobre un cilindro. De arriba hacia abajo y de izquierda a derecha aumenta el número de Reynolds del flujo, evolucionando del estado laminar hasta el de turbulencia completamente desarrollada. En la figura, x es la dirección horizontal, y la vertical y z la dirección saliente de la hoja

Para número de Reynolds pequeño, se observa simetría de reflexión espacial en el flujo respecto a los ejes x e y , e invarianza en el tiempo y traslacional en el eje z (figura 2.1 (a)). Todas estas simetrías satisfacen la ecuación de Navier-Stokes menos la inversión en el eje x ; sin embargo, esta se satisface en la ecuación de Stokes, cuando se desprecia el término no-lineal de la ecuación de Navier-Stokes. Al aumentar la velocidad del flujo incidente (y en consecuencia el número de Reynolds), se rompe la simetría en el eje x , lo cual muestra como empieza a dominar el término no-lineal al aumentar el número de Reynolds. Luego, se rompe la simetría temporal debido a una bifurcación de Andronov-Hopf que hace que el flujo se convierta en periódico en el tiempo (figura 2.1 (b)); esto no quiere decir que se rompe la invarianza, sino que el sistema pasa de tener una invarianza continua a una discreta. De la misma forma sucede con la simetría en y , que se rompe y se forman los caminos de Kármán; cada medio período los remolinos del margen superior serán iguales a los del margen inferior, como se observa en la figura 2.1 (c). No se sabe para que número de Reynolds se rompe la simetría en z , pero hay evidencias numéricas y experimentales que indican que cuando el número de Reynolds excede un valor crítico la invarianza se rompe espontáneamente. Luego existe un umbral para el cual el flujo se hace caótico en su dependencia temporal y finalmente, aguas abajo, el flujo presenta un desorden espacial que se conoce como turbulencia isótropa y homogénea, debido a que estadísticamente su

aspecto no cambia ante rotaciones y traslaciones (figura 2.1 (d) y (e)). El flujo turbulento para número de Reynolds lo suficientemente grande como para que las simetrías rotas se vuelvan a recuperar en un sentido estadístico, se llama turbulencia completamente desarrollada [53]. En este trabajo trataremos siempre con turbulencia completamente desarrollada.

Condiciones de contorno periódicas

Para poder apreciar las simetrías de la ecuación de Navier-Stokes hay que explicitar las condiciones de contorno. Una manera de resolver esto en la teoría es eliminar las condiciones de contorno y considerar que el fluido llena todo el espacio tridimensional. Sin embargo, esto conlleva a problemas numéricos, por lo que asumiremos espacialmente condiciones de contorno periódicas (*c.c.p.*), esto es [24]:

$$\mathbf{v}(x + nL, y + mL, z + qL) = \mathbf{v}(x, y, z) \quad (2.4)$$

para todo x, y, z y todo n, m y q entero, donde L es el período del dominio espacial. Así se podrán hacer todos los cálculos para x, y, z entre 0 y L y finalmente considerar $L \rightarrow \infty$ cuando sea necesario. A partir de las *c.c.p.* la fuerza sobre cualquiera de los contornos se puede trasladar al fluido de la superficie opuesta, lo que da libertad para eliminar el término de presión en la ecuación de Navier-Stokes. La ecuación de Navier-Stokes se puede escribir entonces a través de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ como:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2.5)$$

y la vorticidad también es periódica en el dominio.

Leyes de conservación

El teorema de Noether enuncia que podemos encontrar una magnitud conservada por cada simetría en un sistema que pueda ser descrito por medio de una función de Lagrange. Las simetrías conocidas de la ecuación de Navier-Stokes son: traslación espacial, traslación temporal, transformación galileana, simetría de paridad, invarianza de rotación y transformación de escala [52]. Estas simetrías no son completamente relevantes para nuestro problema de interés debido a que la ecuación de Navier-Stokes es disipativa. Sin embargo se aplican a la ecuación de Euler ($\nu = 0$) y son útiles para poder comprender las conservaciones globales en el límite de la viscosidad yendo a cero.

Veamos como podemos entender estas conservaciones aplicadas a una magnitud arbitraria. Consideremos $f(\mathbf{r})$ como una función espacial cualquiera. El promedio sobre un volumen B_L de dimensión característica L será:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L^3} \int_{B_L} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Las principales conservaciones conocidas en la ecuación de Euler son:

- conservación del momento

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (2.7)$$

- conservación de la energía

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} v^2 \right\rangle = 0, \quad (2.8)$$

- conservación de la helicidad

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle = 0. \quad (2.9)$$

A partir de estas magnitudes en el caso de la ecuación de Navier-Stokes se puede llegar a las relaciones

$$\frac{d}{dt} E = -2\nu\Omega, \quad \frac{d}{dt} H = -2\nu H_\omega, \quad (2.10)$$

donde

$$E = \left\langle \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right\rangle, \Omega = \left\langle \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \right\rangle, H = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle, H_\omega = \left\langle \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} \right\rangle. \quad (2.11)$$

También se define la tasa de disipación de la energía, una magnitud muy utilizada en turbulencia, como:

$$\epsilon = \frac{d}{dt} E. \quad (2.12)$$

Todas estas magnitudes y sus respectivas relaciones de balance son de gran importancia al momento de caracterizar un flujo.

2.1.2. Funciones de estructura

Para poder describir las propiedades de un flujo turbulento es común utilizar el campo de velocidad del flujo, y en particular los incrementos y correlaciones espaciales del mismo [33]. Se definen las funciones de incremento de primer orden y de correlación a dos puntos del campo de velocidad respectivamente como

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (2.13)$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}). \quad (2.14)$$

El campo de velocidad, estadísticamente, está completamente descrito a través de todos los momentos del incremento. En particular suelen considerarse los momentos del incremento longitudinal definidos como

$$S_p(\mathbf{l}) = \langle [(\delta\mathbf{v}_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{l}))]^p \rangle = \left\langle \left[(\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})) \cdot \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} \right]^p \right\rangle. \quad (2.15)$$

Se llama a S_p la función de estructura de orden p . En un flujo turbulento existe un rango de escalas en los que estas funciones siguen una ley de escalas

$$S_p \sim l^{\xi_p}, \quad (2.16)$$

donde ξ_p son los exponentes de escala [36]. Los exponentes ξ_p son usados para caracterizar la intermitencia en turbulencia isótropa y homogénea, pero no son útiles en flujos anisótropos.

Es importante notar que algunos de los momentos de los incrementos longitudinales están relacionados con el espectro de Fourier de la energía y su flujo. Esta propiedad es muy útil debido a la capacidad para poder cuantificar la cantidad de energía contenida en una escala determinada, es decir, para cada componente del espectro de Fourier k asociada a una escala del sistema $l \propto 1/k$. Utilizando el teorema de la convolución se puede ver que el espectro de Fourier de la energía es proporcional a la transformada Fourier de la función correlación. Desarrollando la función de estructura de segundo orden obtenemos

$$S_2(\mathbf{l}) = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) \rangle - 2\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle + \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle = -2C(\mathbf{l}) + 2U^2, \quad (2.17)$$

donde $C(\mathbf{l}) = \langle C(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \rangle$ y U^2 es la velocidad cuadrática media. Podemos observar entonces la relación de la función de estructura de segundo orden y el espectro de energía a través de la función de correlación, la cual es de

gran importancia, ya que podemos conocer la energía del sistema midiendo la función de estructura de segundo orden del campo de velocidad.

En resumen, conocer el espectro, la función de correlación, o la función de estructura de segundo orden es de suma importancia para caracterizar las leyes de escala que sigue el flujo, y por lo tanto para estudiar la turbulencia.

2.2. Teoría de Kolmogorov de 1941

2.2.1. Introducción

Antes de estudiar los flujos rotantes, conviene considerar la teoría básica que describe las leyes de escala que se observan en turbulencia isótropa y homogénea completamente desarrollada. Esta teoría se basa en los conceptos de espectros y funciones de estructura descritos mas arriba, y fue presentada por Kolmogorov en 1941 [40, 41, 42].

2.2.2. Rango inercial

Para comprender la teoría de 1941 de Kolmogorov, primero debemos restringir el rango de escalas en el cual ésta se cumple. En un flujo turbulento tenemos tres escalas características: la escala de inyección de energía del sistema, la escala disipativa, y entre estas dos tenemos el rango inercial, que es el intervalo que satisface leyes de escala. La forma estricta de definir el rango inercial es a través de la ley de los $4/5$ que veremos más adelante; sin embargo el rango inercial se puede comprender desde un sentido más físico. Diremos que estamos observando escalas en el rango inercial cuando en el estado estacionario de un flujo turbulento, desde un punto de vista estadístico, la energía entrante en esa escala es igual a la energía saliente, que es equivalente a decir que solamente hay interacciones no-lineales en este rango y por lo tanto el forzado externo y las fuerzas viscosas pueden ser despreciadas. Podemos entender entonces al rango inercial como el rango en el cual los vórtices mas grandes excitan vórtices mas pequeños, que a su vez excitan otros mas pequeños sin perdida de energía debido a la viscosidad. Esto lo modela por primera vez Richardson a través del esquema de cascada de energía que se muestra en la figura 2.2. El modelo de Richardson necesita de dos fuertes hipótesis: que las interacciones entre escalas sean únicamente a nivel local, y que en este rango se cumpla invarianza de escala [60], ambas hipótesis asumidas luego por la teoría de Kolmogorov.

Considerando la figura 2.2 podemos pensar que los vórtices de mayor tamaño serán del orden de la escala integral, es decir, de la escala en la que

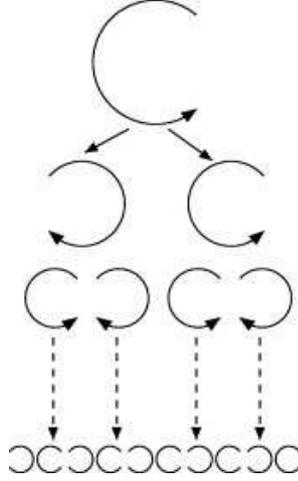


Figura 2.2: : Esquema que muestra la visión de Richardson de la transferencia de energía a través de las escalas en el rango inercial

se produce la turbulencia, mientras que los mas pequeños serán del tamaño de la escala disipativa. En ausencia de intermitencia y en tres dimensiones, el número de vórtices con tamaño característico l aumenta como l^{3n} , para asegurar que los vórtices pequeños llenen el espacio ocupado por los vórtices mas grandes (n es el número de paso en la cascada). La energía introducida en la escala del forzante es entonces transferida a las escalas mas pequeñas en forma jerarquizada y finalmente removida en la escala disipativa.

Para entender la localidad entre interacciones pensemos en la distorsión de un vórtice de tamaño l , que depende fuertemente de la cizalla, es decir, del gradiente de velocidad. Para escalas características l la cizalla será

$$s_l \sim \frac{v_l}{l}, \quad (2.18)$$

donde v_l es la velocidad característica en la escala l . Asumiendo que la velocidad sigue una ley de escalas $v_l \sim l^\alpha$, para $\alpha < 1$ la cizalla sigue una ley $s_l \sim l^{\alpha-1}$ con exponente negativo. Esto implica que la cizalla mas pequeña estará concentrada en las escalas mas grandes, es decir, la escala integral, mientras que la cizalla será mas grande en las escalas mas chicas, es decir, en el rango disipativo. La distorsión que sufrirá un vórtice de tamaño l respecto de otro de tamaño mayor será pequeña, debido a que la cizalla en escalas mayores es muy pequeña. Por otro lado la distorsión que sentirá este vórtice respecto de otros vórtices mas pequeños también será chica, debido a que los vórtices pequeños tendrían que actuar coherentemente sobre el mayor para poder distorsionarlo efectivamente [21]. Como resultado, si $\alpha < 1$ se puede esperar que solamente los vórtices de tamaño parecido a nuestro vórtice inicial

puedan deformarlo.

La validez de la hipótesis de localidad se verificó recientemente en simulaciones a números de Reynolds altos [68, 32, 31].

En cuanto a la invarianza de escalas podemos decir que ésta será violada si los vórtices pequeños no ocupan el mismo espacio que los vórtices grandes. Este es efectivamente el caso en los flujos turbulentos, donde la intermitencia hace que los vórtices mas pequeños se concentren y localicen en el espacio y en el tiempo [45, 28, 46].

2.2.3. Fenomenología de la turbulencia

Consideremos un vórtice de tamaño l que cambia al ser deformado; si t_l es el tiempo de giro del vórtice, entonces en ausencia de otro tiempo característico es razonable pensar que también es el tiempo de transferencia de su energía desde l hacia escalas mas pequeñas [21]. Podemos entonces considerar que el flujo de energía entre escalas Π_l será proporcional a la energía cinética sobre el tiempo t_l , esto es

$$\Pi_l \sim \frac{v_l^2}{t_l} \sim \frac{v_l^3}{l}, \quad (2.19)$$

donde v_l indica la velocidad típica asociada a la escala l (estrictamente hablando, v_l corresponde a $S_1(l)$, la función de estructura de primer orden, v_l^2 corresponde a $S_2(l)$, etc.). En el rango inercial, donde no hay inyección directa ni disipación de energía, el flujo de energía deberá ser independiente de l e igual a la tasa de energía media disipada ϵ , es decir, $\Pi_l \sim \epsilon$, lo que implica que la velocidad característica en la escala l será

$$v_l \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3}. \quad (2.20)$$

Esto expresa que el campo de velocidad es un invariante de escala con exponente $h = 1/3$. Luego, el tiempo característico de un vórtice de tamaño l es $t_l \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3}$. Notar que estos exponentes son consistentes con la hipótesis de localidad de interacciones discutida previamente.

Cuando la escala l se acerca a la escala integral l_0 , es decir, la escala de la producción de la turbulencia, entonces será $v_0 \sim \epsilon^{1/3} l_0^{1/3}$, o en forma equivalente $\epsilon \sim \frac{v_0^3}{l_0}$.

Para obtener la escala mas pequeña del rango inercial, veamos que el tiempo típico en que la difusión viscosa atenúa excitaciones en la escala l es

$$t_l^{dif} \sim \frac{l^2}{\nu}, \quad (2.21)$$

el cual tiende a cero con l mucho más rápido que t_l . Sin importar que tan pequeña sea la viscosidad, la difusión será relevante por debajo de alguna escala [42]. Igualando los dos tiempos obtenemos la escala disipativa de Kolmogorov

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}. \quad (2.22)$$

2.2.4. Hipótesis de la teoría

El análisis dimensional en la sección anterior, y los siguientes resultados que discutiremos, requieren de ciertas hipótesis que conviene explicitar.

Como dijimos anteriormente, Kolmogorov asume que el flujo turbulento es invariante ante cambios de escalas dentro del rango inercial, lo que significa que las propiedades de un flujo serán iguales excepto por un factor de escala en todas las escalas del rango inercial. Esto puede expresarse por la siguiente ecuación para las funciones de estructura del campo de velocidad \mathbf{v} :

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{l}) = \lambda^h \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{l}), \quad (2.23)$$

para todo valor de \mathbf{x} y todo valor de los incrementos \mathbf{l} y $\lambda\mathbf{l}$ pequeños comparados con la escala del forzado, de manera que no se esté tomando el campo de velocidad fuera del rango inercial. Esta hipótesis equivale a asumir la ausencia de intermitencia, y permite obtener los momentos de cualquier orden S_p conociendo que $S_1(l) \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3}$ (ecuación (2.20)).

Kolmogorov también asume universalidad en los flujos turbulentos. Universalidad es la independencia que tiene el comportamiento de un flujo turbulento respecto a la forma de inyección de energía que este tenga. Esto puede verse como la invarianza de las leyes de escala respecto a los distintos mecanismos posibles de forzado.

La última hipótesis que utiliza Kolmogorov para desarrollar su teoría es que un flujo turbulento tiene una tasa de disipación media ϵ por unidad de masa finita y distinta de cero aún en límite de la viscosidad yendo a cero.

2.2.5. Ley de los 4/5

La ley de los 4/5 es un resultado de gran relevancia, debido a que es un resultado exacto para la expresión de la función de estructura de tercer orden del incremento longitudinal de la velocidad. Kolmogorov derivó este resultado de la ecuación de Navier-Stokes asumiendo homogeneidad, isotropía y la última de las hipótesis antes mencionadas [40].

La ley dice lo siguiente: en el límite de $Re \rightarrow \infty$, la función de estructura longitudinal de un flujo turbulento homogéneo e isótropo en el rango inercial,

está dada en término de la tasa media de disipación por unidad de masa ϵ por la expresión

$$\langle [\delta v(\mathbf{r}, \mathbf{l})]^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon l. \quad (2.24)$$

Este resultado sirve de condición de inicio para muchas teorías de turbulencia isótropa y homogénea ya que es exacto y no trivial. La derivación formal de este resultado puede verse en [21]. Sin embargo, en el contexto de esta tesis, puede verificarse fácilmente asumiendo invarianza de escala tomando el cubo de la ecuación (2.20), que resulta en $v_l^3 \sim \epsilon l$.

2.2.6. Principales resultados de la teoría de Kolmogorov

Considerando la hipótesis de autosimilaridad de un flujo turbulento isótropo y homogéneo en el rango inercial, y tomando el resultado para la velocidad característica en la escala l (o para la función de estructura de primer orden) expresado por la ecuación (2.20), podemos obtener los exponentes de escala del flujo, o equivalentemente, una ley de escalas para las funciones de estructura de todos los órdenes.

Primero notemos que por isotropía y homogeneidad $S_p(\mathbf{l}) = S_p(l)$; luego como el flujo es autosimilar la función de estructura de orden p satisface

$$\langle \delta v_{\parallel}(\mathbf{r}, \lambda \mathbf{l}) \rangle^p = \lambda^{ph} \langle \delta v_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \rangle^p. \quad (2.25)$$

Luego, como se debe cumplir la ecuación (2.20), es decir, para la función de estructura de orden $p = 1$, obtenemos que $h = 1/3$. Por lo que llegamos al resultado de que para la función de estructura de orden p

$$S_p(l) = \langle (\delta v(l))^p \rangle \propto l^{p/3}. \quad (2.26)$$

Luego, por medio de un análisis dimensional obtenemos

$$S_p(l) = C_p \epsilon^{p/3} l^{p/3}, \quad (2.27)$$

donde C_p es adimensional y para $p = 3$, $C_3 = -4/5$, el cual es universal e independiente del flujo considerado por la ley de los 4/5 discutida en la sección anterior.

Que la función de estructura de segundo orden sea proporcional a $l^{2/3}$ implica una ley de potencias de $k^{-5/3}$ para el espectro de energía $E(k)$. En forma mas precisa,

$$E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.28)$$

El resultado obtenido por Kolmogorov para $E(k)$ es muy utilizado en el estudio de flujos turbulentos, siendo una muy buena aproximación para el espectro de energía en el caso de un flujo isótropo y homogéneo.

2.2.7. Limitaciones de la teoría de Kolmogorov e intermitencia

A pesar de que la teoría de Kolmogorov predice correctamente algunos resultados, como el espectro de energía $E(k)$ en el rango inercial y la ley de los 4/5 (únicamente este último es un resultado exacto para flujos isótropos) la limitación principal de la teoría de Kolmogorov es la de asumir autosimilaridad dentro del rango inercial. Para describir mejor el comportamiento de un flujo turbulento hay que considerar los efectos de intermitencia en el rango inercial, que corresponden a desviaciones de la estricta autosimilaridad.

La intermitencia se puede entender entonces como una ruptura de la invarianza de escalas [4]. Para un flujo autosimilar, independientemente de en que escalas nos situemos, siempre observaríamos, estadísticamente, el mismo tipo de comportamiento. En un flujo intermitente el resultado de lo que observemos va a depender de la escala a la que examinemos. En particular, en un flujo intermitente observamos, a medida que consideramos escalas cada vez mas pequeñas, eventos muy energéticos y localizados en el espacio y el tiempo con una probabilidad cada vez mayor (comparada con la ocurrencia esperada para una distribución Gaussiana) [5]. Cuanto más intermitente sea un flujo, menos autosimilar será.

El hecho de que un flujo turbulento isótropo y homogéneo no sea autosimilar se refleja en desviaciones de las funciones de estructura de orden p de la ley esperada $\sim l^{p/3}$ cada vez mayores a medida que se aumenta el orden [7] [8].

2.3. Turbulencia rotante

En esta tesis consideramos mayormente flujos rotantes. En un flujo rotante la ecuación de momento se ve afectada por el término de Coriolis. La ecuación de Navier-Stokes en un sistema de referencia rotante toma la forma

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.30)$$

donde $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$ es la rotación del sistema, el segundo término a la derecha corresponde a la aceleración de Coriolis, y la aceleración centrífuga fue absorbida

dentro de la presión $P = p/\rho + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2$.

La rotación introduce una dirección privilegiada y rompe la isotropía del sistema. La anisotropía de los flujos rotantes es de interés en procesos oceánicos y atmosféricos de gran escala [9], que explica fenómenos tales como los jets atmosféricos [67] [63] y eventos localizados y altamente energéticos como los entornos de tornados [34]. También es importante para comprender problemas planetarios y estelares [35], y en flujos magnéticos anisótropos [1].

La competencia entre la fuerza de Coriolis y las fuerzas inerciales afectan el comportamiento del flujo turbulento. La importancia que tiene la rotación en la dinámica del flujo es medida a través del número de Rossby

$$Ro = \frac{U}{2\Omega L}, \quad (2.31)$$

donde U y L son, respectivamente, la velocidad y longitud característica del sistema. El número de Rossby es justamente la razón entre la fuerza de Coriolis y el término no-lineal de la ecuación (2.29). Para $Ro \rightarrow \infty$ la rotación, y por lo tanto el término de Coriolis, se hacen despreciables, y el flujo turbulento debería recobrar su isotropía.

En el límite de $Ro \rightarrow 0$ (rotación rápida) se cree que el flujo se vuelve bidimensional ($2D$) [23]. Este fenómeno se puede explicar a través de la teoría de ondas resonantes [66], que considera al campo de velocidad del fluido como una superposición de ondas inerciales con alta frecuencia característica, modulada por vórtices con escala temporal lenta. De la teoría no-lineal débil se deriva una ecuación promediada para la dinámica en esta escala temporal lenta [16, 17]. La ecuación explica la transferencia de energía de las escalas chicas a las grandes (y de los modos tridimensionales a los bidimensionales) a través de la resonancia de las interacciones entre tríadas de ondas inerciales [65].

2.3.1. Teoría de ondas resonantes y ecuación promedio

Adimensionalizando la ecuación de Navier-Stokes rotante sin forzante externo a través de las escalas características L y U (respectivamente la longitud y la velocidad) ésta queda expresada en términos de los números de Reynolds y de Rossby

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} - \frac{2}{Ro} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.32)$$

De aquí en adelante omitiremos el símbolo \sim para las variables adimensionales.

Para encontrar la solución de la ecuación de Navier-Stokes en el límite $Ro \rightarrow 0$, mantendremos primero solo el orden dominante, es decir,

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{2}{Ro} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} = 0. \quad (2.33)$$

Bajo esta aproximación simplificada, la solución está dada por la superposición de ondas helicoidales [66]

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} a_s(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.34)$$

donde $\mathbf{h}_{\pm}(\mathbf{k})$ son los modos de helicidad, definidos como autofunciones ortogonales del operador rotor, satisfaciendo $i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_s = s|\mathbf{k}\mathbf{h}_s|$ con $s = \pm 1$. En el espacio de Fourier el campo de velocidad para un único vector de onda será

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = a_+(\mathbf{k})\mathbf{h}_+ + a_-(\mathbf{k})\mathbf{h}_-. \quad (2.35)$$

Al expandir la solución del campo de velocidad en modos helicoidales y evaluar en la ecuación (2.32) queda explícito que los modos interactúan por medio de tríadas, es decir, la evolución de un modo helicoidal en un flujo turbulento va a estar acoplada con otros modos helicoidales únicamente de a tres.

En un sistema rotante, los modos de helicidad son ondas inerciales, lo cual hace de la descomposición helicoidal la representación más adecuada del campo de velocidad [15]. Las amplitudes de las ondas de helicidad tienen una oscilación armónica rápida $a_s(\mathbf{k}, t) = A_{s_k} \exp(i\omega_{s_k} t / Ro)$ dada por la frecuencia $\omega_{s_k} = 2s(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{k})/k = 2sk_z/k = 2s \cos \theta_k$, con θ_k el ángulo entre el vector Ω y el vector número de onda \mathbf{k} .

El resultado de esta aproximación simplificada para $Ro \rightarrow 0$ solo es válida para tiempos del orden del número de Rossby, por lo cual la solución no considera la evolución para tiempos largos de las amplitudes de las ondas. Esto es así porque la solución de la ecuación (2.32) evoluciona en función de dos escalas temporales, una lenta t y el tiempo rápido $\tau = t/Ro$ asociado a las ondas inerciales, por lo que la solución de la aproximación perturbativa simplificada no puede ser adecuada para tiempos largos. Sin embargo, la solución (2.34) puede seguir siendo útil al agregar una dependencia temporal con escala temporal t a las amplitudes de las ondas $a_s(t, \tau) = A_{s_k}(t) \exp(i\omega_{s_k} \tau)$, lo cual nos da una solución que contiene la oscilación rápida de las ondas inerciales, moduladas por la amplitud dependiente del tiempo lento $A_{s_k}(t)$ asociada a los vórtices.

Para obtener la evolución de amplitud en la escala lenta, reemplazamos (2.34) en la ecuación (2.32). El término de Coriolis es diagonal en la base del espacio de Fourier por lo cual la ecuación toma la forma

$$\left(\partial_t - \frac{i}{Ro}\omega_{s_k} + \frac{1}{Re}k^2\right)a_{s_k} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} \sum_{s_p, s_q} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k, s_p, s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^*, \quad (2.36)$$

donde observamos que la suma es sobre los números de onda que satisfagan $\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0$, la cual es la condición de resonancia entre tríadas para tiempos rápidos [66]. Ahora escribiendo la variación temporal como la variación sobre ambas escalas temporales, es decir, $\partial_t \rightarrow \partial_t + (1/Ro)\partial_\tau$, obtenemos una ecuación para la amplitud de la variación lenta luego de promediar en tiempos tales que la dependencia con la escala temporal rápida τ desaparezca. Esta ecuación resultante es

$$\left(\partial_t + \frac{1}{Re}k^2\right)A_{s_k} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0}^{\omega_{s_k}+\omega_{s_p}+\omega_{s_q}=0} \sum_{s_p, s_q} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k, s_p, s_q} A_{s_p}^* A_{s_q}^*, \quad (2.37)$$

la cual es válida para tiempos lentos del orden de t y condiciona a las frecuencias lentas a satisfacer la resonancia de tríadas $\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q} = 0$; solo las frecuencias que cumplan esta relación sobrevivirán en la ecuación (2.37).

De las dos condiciones de resonancia y de la relación de dispersión para las ondas inerciales obtenemos las relaciones que deben cumplir los modos [66, 23],

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0, \quad (2.38)$$

y

$$\frac{k_z}{k} + \frac{p_z}{p} + \frac{q_z}{q} = 0. \quad (2.39)$$

Podemos decir que en la teoría de ondas resonantes se pueden dividir los modos en dos tipos. Los modos lentos son aquellos que tienen frecuencia nula $\omega_{s_k} = 0$ y $k_z = 0$, por lo cual coinciden con modos de dos dimensiones que no tienen variación a lo largo del eje de rotación. Estos modos son trivialmente resonantes, ya que corresponden a modos puramente vorticosos, sin oscilaciones asociadas a ondas, y cumplen en forma trivial la ecuación (2.39). Los demás modos son los llamados modos rápidos y son aquellos con $k_z \neq 0$ y su orientación puede ser en cualquier dirección. A partir de esta distinción entre modos lentos y rápidos resultan tres posibles clases de tríadas resonantes,

“rápido-lento-rápido”, “lento-lento-lento” y “rápido-rápido-rápido”, donde se siguió la convención de que el primer número de onda de la tríada corresponde al número de onda que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (2.37) [15, 23, 66].

En el límite de rotación rápida los modos lentos evolucionan mediante su propia dinámica, esta corresponde a la tríada “lento-lento-lento”, ya que en la tríada “rápido-lento-rápido” el modo lento solo actúa como catalizador entre los dos modos rápidos.

La ecuación promediada para modos lentos puede dividirse en dos ecuaciones. Cuando $Ro \rightarrow 0$ la velocidad horizontal promediada a lo largo del eje vertical $\bar{\mathbf{v}}_H^{3D} = (\bar{u}_H^{3D}, \bar{v}_H^{3D})$ satisface la ecuación de Navier-Stokes $2D$, mientras que la velocidad vertical promediada verticalmente \bar{w}_H^{3D} satisface la ecuación $2D$ de un escalar pasivo, esto es, respectivamente [17, 2]

$$\partial_t \bar{\mathbf{v}}_H^{3D} + (\bar{\mathbf{v}}_H^{3D} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}_H^{3D} = -\nabla \frac{P_H}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}_H^{3D}, \quad (2.40)$$

y

$$\partial_t \bar{w}_H^{3D} + (\bar{\mathbf{v}}_H^{3D} \cdot \nabla) \bar{w}_H^{3D} = \nu \nabla^2 \bar{w}_H^{3D}. \quad (2.41)$$

La derivación de este resultado se puede ver en detalle en [15, 66]. Esto no implica que un flujo con rotación rápida se convierte en bidimensional, pero sí implicaría que la dinámica debe contener una componente independiente bidimensional.

Notemos finalmente que la componente z del campo de vorticidad, ω_z , también cumple la ecuación del escalar pasivo, esto puede verse fácilmente tomando el rotor de la ecuación (2.40).

2.3.2. Espectro de la turbulencia rotante

Los resultados de la sección anterior pueden usarse para elaborar una teoría fenomenológica al estilo de la de Kolmogorov [69], que tenga en cuenta el efecto de la rotación en el espectro de energía de un flujo turbulento.

Partiendo de la relación dimensional para el flujo de energía

$$\epsilon \sim \frac{v_l^2}{\tau_l}, \quad (2.42)$$

y teniendo en cuenta que la mayor parte de la energía está en modos bidimensionales

$$\epsilon \sim \frac{v_{l\perp}^2}{\tau_{l\perp}}, \quad (2.43)$$

donde $\tau_{\perp} \sim l_{\perp}/v_{l_{\perp}}$, y el subíndice \perp indica que los incrementos son tomados en la dirección perpendicular al eje de rotación.

Como solo una fracción de las tríadas contribuye al flujo ϵ (las tríadas resonantes), es razonable asumir que el flujo de energía se va a ver reducido respecto al caso isótropo y homogéneo. Al orden mas bajo, se asume que la reducción es linealmente proporcional a la razón de los tiempos rápidos $\tau \sim 1/\Omega$ respecto de los lentos τ_{\perp} [36, 29]:

$$\epsilon \sim \frac{v_{l_{\perp}}^2}{\tau_{\perp}} \frac{\tau_{\Omega}}{\tau_{\perp}} \sim \frac{v_{l_{\perp}}^4}{\Omega l_{\perp}^2}, \quad (2.44)$$

y asumiendo ϵ constante en el rango inercial

$$v_{l_{\perp}}^2 \sim \epsilon^{1/2} \Omega^{1/2} l_{\perp}, \quad (2.45)$$

que resulta en un espectro

$$E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}^{-2}. \quad (2.46)$$

Este espectro se observa en simulaciones numéricas directas y en experimentos [48, 47, 49] y [43]. Es importante notar que cuando el flujo es helicoidal (es decir, cuando la velocidad y la vorticidad están alineadas), el espectro de energía es aún mas empinado, variando entre k_{\perp}^{-2} y $k_{\perp}^{-2,5}$ (ver [47, 50]).

Capítulo 3

Herramientas y métodos

En este capítulo introducimos las herramientas básicas y los métodos que usaremos para el análisis en el capítulo 4. Describimos el método numérico que se usa para resolver la ecuación de Navier-Stokes ejemplificando por medio de la ecuación de Burgers, con un código desarrollado para esta tesis. Luego presentamos los aspectos formales del exponente de cancelación [55], el método para caracterizar intermitencia en esta tesis, y a continuación describimos un código numérico paralelo desarrollado específicamente para analizar los datos masivos provenientes de las simulaciones.

3.1. Simulaciones numéricas directas

Los datos analizados fueron provistos por una simulación numérica directa (DNS por sus siglas en inglés). La principal característica de una simulación numérica directa es que ésta resuelve las ecuaciones involucradas y no un modelo promediado, de manera que todo el rango espacial y temporal quedan resueltos numéricamente en forma explícita.

Las simulaciones se realizaron usando el método pseudoespectral [13, 57] y se evolucionaron en el tiempo por medio del esquema de Runge-Kutta de segundo orden, utilizando las ya nombradas condiciones periódicas de contorno.

Es fundamental saber si la resolución de una simulación es adecuada para poder abordar el proceso a analizar. Para nuestro caso de interés, en cuanto a la resolución espacial, queremos tener conocimiento de los procesos que habitan en el rango inercial de un flujo turbulento, esto es, entre la escala integral y la disipativa, resolviendo correctamente esta última. La escala disipativa es $\eta = 1/k_\nu$ donde $k_\nu = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, por lo cual el mínimo intervalo espacial debe ser menor que η . Resolviendo todas las escalas entre la escala integral y la

disipativa, el mínimo de puntos de grilla necesarios debe ser

$$N^3 \leq (Re)^{9/4}, \quad (3.1)$$

con un factor de proporcionalidad frente al número de Reynolds que se ajusta realizando simulaciones a baja resolución. Luego la resolución temporal debe ser menor que el tiempo que le lleva a la parcela de fluido mas rápida trasladarse un intervalo Δx provisto por la relación (3.1). Esto es,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{U} \sim \frac{1}{UN}; \quad (3.2)$$

esta condición es llamada condición de Courant-Friedrichs-Lewy [13].

3.1.1. Evolución temporal: Runge-Kutta

Para obtener la evolución temporal de un campo v que sea dependiente de F a través de la relación

$$\frac{dv}{dt} = F(v, t) \quad (3.3)$$

integramos esta ecuación en el tiempo discretizado con paso Δt , avanzando inicialmente medio paso

$$v^{t+1/2} = v^t + \frac{\Delta t}{2} F(v^t, t). \quad (3.4)$$

Luego utilizamos $v^{t+1/2}$ para evaluar en la ecuación (3.3) y finalmente avanzar un paso entero

$$v^t = v^t + \Delta t F(v^{t+1/2}, t + 1/2). \quad (3.5)$$

Podemos realizar evoluciones de Runge-Kutta de orden mayor que darían mas precisión en el resultado, sin embargo el orden dos economiza tiempo de procesamiento respecto a ordenes mayores, y su precisión es suficiente para los procesos que se buscan estudiar [13].

3.1.2. Evolución espacial: Método pseudospectral

El método pseudoespectral consiste en calcular las derivadas espaciales del campo de velocidad en el espacio Fourier, mientras que productos entre los campos se calculan en el espacio real [26, 27]. El campo de velocidades expandido en el espacio Fourier es

$$v(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t) e^{ikx} \quad (3.6)$$

Aproximaremos esta expansión por la serie truncada

$$v^N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} v_k(t) e^{ikx} \quad (3.7)$$

Este truncamiento es aceptable si el error introducido no afecta significativamente al subespacio generado por los números de onda de interés en la expansión. Las ventajas que tiene el método espectral son: que se trabaja directamente con los modos Fourier que corresponden a escalas espaciales naturales del proceso turbulento, y que la convergencia numérica es exponencialmente rápida [24]. Para ver este último punto consideremos la transformada de Fourier

$$v_k = \int e^{-ikx} v(x) dx, \quad (3.8)$$

al integrar por partes se obtiene que para k grande $v_k \sim k^{-1}$ ya que $|\partial_x v|$ está acotado. Repitiendo este proceso m veces obtenemos $v_k \sim k^{-m}$, de modo que cualquier función $v(x)$ diferenciable y periódica satisface $|v_k|/k^m \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$ y para todo $m > 0$. Esto es, la contribución de los modos grandes se va a cero mas rápido que cualquier potencia de k .

Ahora considerando que la ecuación de interés es la de Navier-Stokes, los términos que se necesitan calcular en el espacio espectral son el término de advección (no-lineal), el término viscoso y el término de gradiente de presión. La evaluación y transformación del término no-lineal en una grilla de N números de onda involucra $O(N^2)$ operaciones de punto flotante debido a que hay que realizar la convolución de v con $\partial_x v$ en el espacio Fourier. En el espacio real este término involucra solamente $O(N)$ operaciones debido a que es un producto directo; esta ventaja será utilizada de la siguiente forma. Transformamos, por medio de una transformada rápida de Fourier FFT (“Fast Fourier Transform”) el término de la velocidad y el término de la derivada espacial de la velocidad del espacio espectral al espacio real; la derivada espacial en el espacio de Fourier implica únicamente multiplicar por ik a la expansión. Luego, realizamos el producto directo de ambos términos y volvemos a transformar el resultado al espacio Fourier. Este proceso disminuye el número de operaciones de $O(N^2)$ a $O(N \log(N))$, debido a que la transformada FFT requiere $O(N \log(N))$ operaciones para realizar la transformada del campo.

Al discretizar el espacio real en N intervalos Δx , se produce un efecto espurio por el hecho de que no se puede distinguir entre las funciones e^{ikx} y las funciones $e^{ik'x}$ con k' mayor a la frecuencia de Nyquist en este espacio discretizado. Mientras que en los términos lineales solo aparecen los números de onda truncados $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$, al evaluar el término no-lineal este genera acoplamiento entre los distintos modos de Fourier y puede excitar números de onda mayores. Estos modos armónicos producirán *aliasing*. Para evitar esto se utiliza la regla de los 2/3 [13], que consiste en forzar todos los modos con $|k| > N/3$ para que tengan amplitud nula, lo cual garantiza que el acoplamiento espurio con estos modos armónicos sea nulo.

3.1.3. Ecuación de Burgers

Para ilustrar los métodos antes descriptos utilizamos como ejemplo la ecuación de Burgers [10], que corresponde a una simplificación de la ecuación de Navier-Stokes en una dimensión, sin presión y sin forzante externo, la cual tiene todos los términos de interés que mas adelante necesitaremos para resolver la ecuación de Navier-Stokes en tres dimensiones. La forma de esta ecuación es

$$\partial_t v + v \partial_x v = \nu \partial_{xx}^2 v. \quad (3.9)$$

Para integrar la ecuación de Burgers utilizamos el método de Runge-Kutta para la evolución temporal, y para la evolución espacial el método pseudoespectral antes mencionado, y también el método de diferencias finitas para poder compararlos. Este último método consiste en estimar las derivadas espaciales a través de las diferencia entre la velocidad de dos o mas puntos vecinos en el espacio real, esto es (a segundo orden):

$$\partial_x v(x) = \frac{v(x - \Delta x) - v(x + \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (3.10)$$

Para resolver el problema de Burgers utilizamos condiciones periódicas de contorno en una caja de tamaño 2π dividida en 512 puntos de grilla, con condiciones iniciales $v(t = 0) = \text{sen}(x)$ y con una viscosidad $\nu = 0,05$.

En la figura 3.1 mostramos la condición inicial para la ecuación de Burgers y la resolución numérica de ésta para el momento en el cual se produce el frente de choque para los métodos de diferencias finitas, pseudoespectral, y pseudoespectral con la regla de los 2/3.

Podemos notar en la figura 3.1 que en la cercanía del choque, es decir donde las variaciones en la velocidad son mayores, es donde se produce la mayor variación entre los métodos. Notamos que el método de diferencias finitas presenta mayores variaciones en los valores de la velocidad.

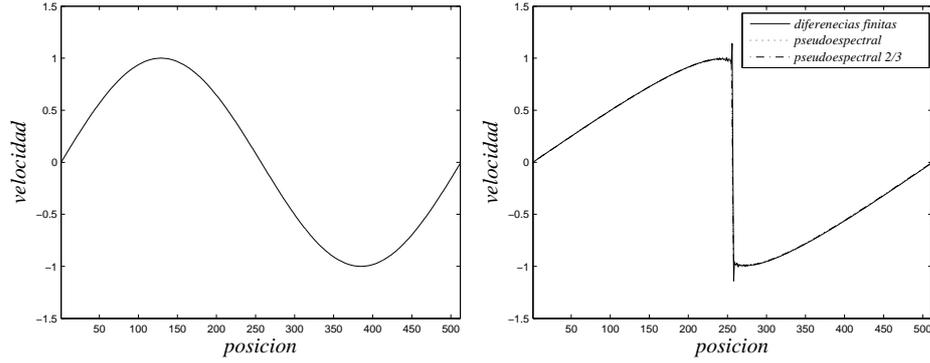


Figura 3.1: Velocidad en función de la posición en el problema de Burgers para (izquierda) $t = 0$ y (derecha) resuelta por medio de los métodos de diferencias finitas (rayas), pseudoespectral (puntos) y pseudoespectral con la regla de los 2/3 (punto-rayas).

En la figura 3.2 graficamos el espectro de energía $E(k)$ para los tres métodos de integración espacial. En el caso de la ecuación resuelta por medio del método de diferencias finitas observamos que para los número de ondas mas grandes hay mas energía que en las soluciones obtenidas por medio del método pseudoespectral; esto se debe a lo mencionado anteriormente, el método de diferencias finitas no resuelve bien el choque.

Si bien no se observan grandes diferencias en este caso entre el método espectral con y sin la regla de los 2/3, para $\nu = 0$ el método sin la regla de los 2/3 es inestable. Por este motivo en este trabajo utilizaremos resultados provenientes de simulaciones usando el método pseudoespectral con la regla de los 2/3. En resumen, el método presenta varias ventajas: es estable, trabajamos directamente con los modos de Fourier que corresponden a escalas espaciales, los invariantes cuadráticos también lo serán en la versión truncada, y además la convergencia es exponencial.

3.1.4. Simulaciones y parámetros

Para este trabajo se utilizaron datos provenientes de simulaciones directas de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de momento con rotación, ecuaciones (2.1) y (2.29) respectivamente. Se utilizaron simulaciones de flujos excitados con dos tipos de mecanismos forzantes distintos: con forzado de Arnold-Beltrami-Childress (ABC) y de Taylor-Green (TG) [48, 47, 49]. La forma del forzado TG es tal que no inyecta helicidad neta en el flujo; esta es, para la fuerza por unidad de volumen y de masa

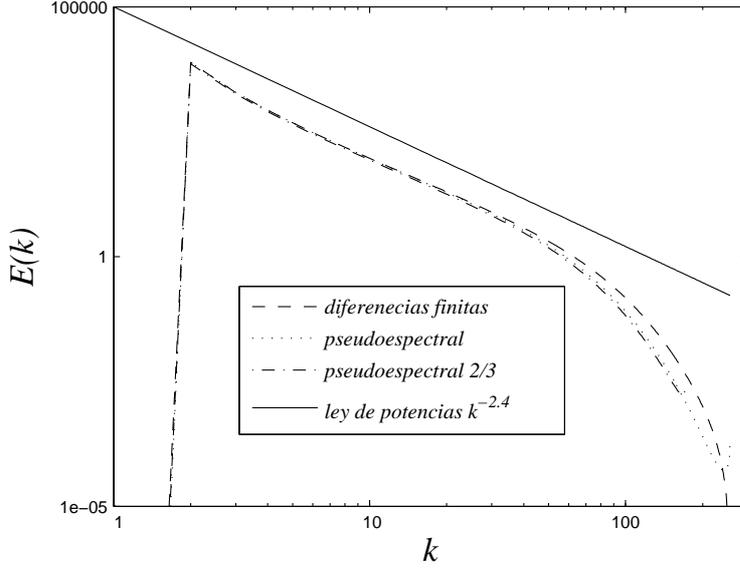


Figura 3.2: Energía E en función del número de onda k , del problema de Burgers resuelta por medio de los métodos de diferencias finitas (rayas), pseudoespectral (puntos) y pseudoespectral con la regla de los 2/3 (punto-rama).

$$\mathbf{f}_{TG} = f_0[\sin(k_f x) \cos(k_f y) \cos(k_f z)\hat{x} - \cos(k_f x) \sin(k_f y) \cos(k_f z)\hat{y}]. \quad (3.11)$$

En cambio en el forzado ABC se produce la máxima inyección de helicidad posible; esta tiene la siguiente forma

$$\mathbf{f}_{ABC} = f_0[(B \cos(k_f y) + C \sin(k_f z))\hat{x} + (A \sin(k_f x) + C \cos(k_f z))\hat{y} + (A \cos(k_f x) + B \sin(k_f y))\hat{z}]. \quad (3.12)$$

Los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones son mostrados en la tabla 3.1.

3.2. Exponente de cancelación

En un flujo turbulento la intermitencia está relacionada con la presencia de estructuras localizadas en distintas escalas. La proximidad o lejanía de dichas estructuras puede llevar a rápidas variaciones en las derivadas del campo, y también a rápidos cambios de signo. Para poder estudiar la variación en el signo de una magnitud en distintas escalas a partir de los datos provenientes de las simulaciones, utilizaremos el exponente de cancelación [55] que

pasaremos a definir. Primero vamos a definir algunas medidas estadísticas que serán de ayuda para el entendimiento de este último.

Medida de probabilidad: Dado un dominio X , para cualquier subconjunto $S \subset X$ la medida de probabilidad μ_p asigna sobre este un valor no negativo $0 \leq \mu_p(S) \leq 1$, satisfaciendo la relación $\mu_p(\sum_i S_i) = \sum_i \mu_p(S_i)$ con S_i cualquier colección disjunta de subconjuntos de X . Luego, si el espectro de la dimensión generalizada D_q de la magnitud de interés no varía con la escala q entonces la medida de probabilidad es llamada fractal; por el contrario si el espectro depende de la escala será llamado multifractal.

Medida de signo: la medida de signo de un conjunto es equivalente a la medida de probabilidad, solo que esta puede tomar valores positivos y negativos.

Singularidad de signo: decimos que un conjunto es singular de signo si para cualquier subconjunto $A \subset X$ tal que $\mu(A) \neq 0$, sin importar el tamaño de A , existe un conjunto $B \subset A$ de manera que el signo de $\mu(B)$ sea opuesto al signo de $\mu(A)$.

De la misma manera que en un campo multifractal la medida de probabilidad está caracterizada por el espectro de dimensión generalizada, la medida de signo está caracterizado por el exponente de cancelación.

Consideremos un fluido para ilustrar estos conceptos; dividimos el espacio en subconjuntos disjuntos $Q_i(l)$ ordenados, de tamaño l que cubren todo el dominio $Q(L)$ de tamaño L . La medida de signo para cada escala l de una magnitud escalar $f(x)$ será [55, 14]

$$\mu_i(l) = \frac{\int_{Q_i(l)} d^3x f(x)}{\int_{Q(L)} d^3x |f(x)|}, \quad (3.13)$$

donde podemos observar que $\mu_i(l)$ está normalizado entre -1 y 1. Mirando el numerador de la ecuación (3.13) podemos interpretar a $\mu_i(l)$ como la diferencia entre la medida de probabilidad de la componente positiva y la medida de probabilidad de la componente negativa de $f(x)$ en $Q_i(l)$. A medida que la escala de los subconjuntos aumenta se van produciendo cancelaciones debido a la competencia entre estructuras de signo opuesto. Para cada escala l se define la función de partición

$$\chi(l) = \sum_{Q_i(l)} |\mu_i(l)|. \quad (3.14)$$

Observemos que si $\mu_i(l)$ es una medida de probabilidad usual (sin signo) entonces debería valer $\chi(l) = 1$; este valor se reobtiene para un flujo suave. Si hay cancelación (cambios de signo) presente, $\chi(l) \leq 1$. Si el flujo sigue leyes

de potencias, el comportamiento de escalas de la contribución de las cancelaciones se estudia a través de un exponente de escala llamado exponente de cancelación κ [55], que se define a partir de la relación $\chi(l) \sim l^{-\kappa}$ [61] y representa una medida cuantificable de la eficiencia de cancelación en la función de partición. Si existe tal exponente (con $\kappa > 0$) entonces la medida de signo es singular de signo. Por lo visto anteriormente si el flujo es suave entonces $\kappa = 0$, y está demostrado que para procesos puramente estocásticos $\kappa = d/2$ donde d es la dimensión del sistema [55].

3.2.1. Exponente de cancelación y dimensión de estructuras

Las rápidas oscilaciones en el signo de una magnitud pueden asociarse a una cantidad muy intermitente, que cambia de signo rápidamente en estructuras localizadas en escalas arbitrariamente chicas. En esta sección derivamos por medio de un modelo geométrico y fenomenológico una relación entre las propiedades de estas estructuras y el exponente de cancelación κ . Los argumentos que usamos son similares a los usados en [61, 62, 30]. Supongamos que el campo está correlacionado en D dimensiones y no correlacionado en $d - D$ dimensiones, donde d es la dimensión del espacio y D es una dimensión generalizada. Para una magnitud completamente correlacionada tendremos $D = d$ y para una completamente descorrelacionada $D = 0$. Para casos intermedios, la función de partición será

$$\chi(l) = \sum_{Q_i(l)} \left| \frac{\int_{Q_i(l)} d^d \mathbf{x} f(\mathbf{x})}{\int_{Q(L)} d^d \mathbf{x} |f(\mathbf{x})|} \right| \sim \frac{1}{L^d \langle f^2 \rangle^{1/2}} \left(\frac{L}{l} \right)^d \left| \int_{Q_i(l)} d^d \mathbf{x} f(\mathbf{x}) \right|, \quad (3.15)$$

donde se utilizó homogeneidad al remplazar la suma sobre todos los subconjuntos $Q_i(l)$ por $(L/l)^d$ multiplicado por la integral sobre un subconjunto genérico de tamaño l . El valor absoluto del escalar se reemplazó por $L^d \langle f^2 \rangle^{1/2}$.

Para realizar la integral sobre el subconjunto $Q_i(l)$, primero asumimos que el escalar f en el rango inercial sigue alguna ley de potencias que pueda ser representada por una función de estructura del escalar f , de manera que $\langle \delta f(s) \rangle \sim s^h$, donde s representa un incremento espacial. Luego dividimos $Q_i(l)$ en dominios de volumen λ^d , escala en promedio en la que la magnitud está correlacionada, de forma que se puedan separar las contribuciones de los dominios debido a donde el escalar está correlacionado y donde no. Entonces,

$$\left| \int_{Q_i(l)} d^d \mathbf{x} f(\mathbf{x}) \right| \sim \langle f^2 \rangle^{1/2} \int_{Q(l)} d^D s \left(\frac{s}{\lambda} \right)^h \int_{Q(l)} d^{d-D} s. \quad (3.16)$$

Las dimensiones no correlacionadas dan un valor proporcional a la raíz cuadrada de su volumen $(l/\lambda)^{(d-D)/2}$ [61, 62], mientras que las dimensiones correlacionadas dan un valor proporcional a $(l/\lambda)^{h+D}$. Obtenemos

$$\chi(l) \sim l^{-(\frac{d-D}{2}-h)}, \quad (3.17)$$

que es la relación entre la dimensión de las estructuras correlacionadas D y el exponente de cancelación κ , esto es

$$\kappa = \frac{d-D}{2} - h. \quad (3.18)$$

3.2.2. Caso tridimensional

En esta sección presentamos el método numérico para calcular el exponente de cancelación desarrollado en esta tesis. Primero veremos cómo se realiza el cálculo del exponente de cancelación usando un único procesador, para luego pasar a la instancia más compleja del cálculo del mismo mediante varios procesadores en paralelo.

Imaginemos una caja de lado L y de volumen $Q(L)$ grillada por $N \times N \times N$ puntos, la cual tiene que ser rellenada por cajas de tamaño $Q_i(l)$. El volumen más pequeño de las cajas dependerá de la mínima resolución espacial que se tenga en la simulación; en este caso será $\Delta V = (\Delta x)^3 = L/N^3$. Naturalmente la caja más grande será igual al volumen completo del dominio de integración numérica. El número de tamaños de cajas posibles será igual a la resolución espacial lineal N de la simulación.

Utilizamos esto para calcular la función de partición. En particular, calculamos $\int_{Q_i(l)} d^3x f(\mathbf{x})$ sumando los valores de la magnitud $f(\mathbf{x})$ en la caja $Q_i(l)$. La función de partición (3.14) la calculamos sumando el valor absoluto de cada una de las cajas individuales sobre todo el volumen.

Un punto a tener en cuenta es que para algunos tamaños de caja, el volumen de las cajas sumadas no cubren el volumen completo, esto es, $\sum_i Q_i(l) \neq Q(L)$. Esto incide en la medida de signo $\mu_i(l)$, como se puede observar en la ecuación (3.13) ya que la normalización sobre todo el volumen $Q(L)$ en ese caso no es correcta (ver figura 3.3). La forma que se eligió para resolver este problema fue reemplazar el valor neto de la magnitud $f(\mathbf{x})$ en el volumen completo (denominador de la ecuación (3.13)) por el valor neto de la magnitud $f(\mathbf{x})$ en un volumen reducido con $N' \times N' \times N'$ puntos de grilla, donde N' está dado por el número máximo de veces que entra uno de los lados de la caja en uno de los lados del volumen total. Llamemos m al número de puntos en la grilla que tiene uno de los lados de la caja pequeña y sea n un número entero que indica el número máximo de veces que entra m

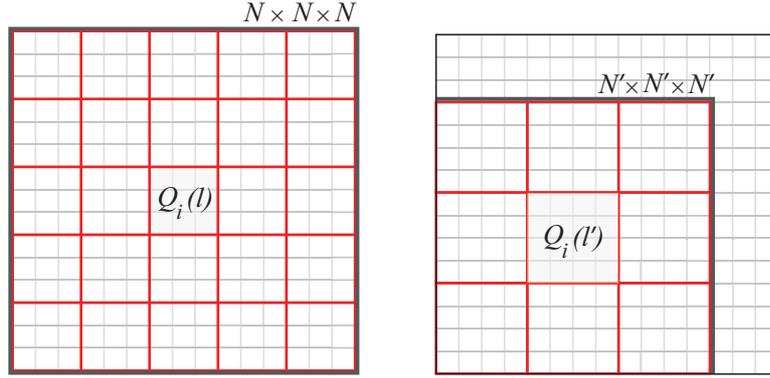


Figura 3.3: Esquema que ejemplifica como el número de cajas sobre el cual se suman los valores de la magnitud pueden cubrir (izquierda) o no (derecha) al tamaño del volumen completo del espacio a ser analizado.

en uno de los lados del volumen completo (con N puntos). Entonces valdrá que

$$N' = mn \leq N \leq m(n + 1). \quad (3.19)$$

La corrección en la normalización hace que cuando se suman todas las cajas, estas abarquen el mismo volumen que el utilizado para calcular el valor absoluto en el volumen total de referencia. Esto puede observarse en la figura 3.3.

Ahora consideremos el caso en que tenemos que hacer este cálculo usando varios procesadores en paralelo. Si tenemos P procesadores, los datos de la magnitud que se quiere estudiar tendrán que ser distribuidos entre estos P procesadores. Dividimos el volumen completo de valores del campo en bloques con forma de paralelepípedos con sus lados mayores perpendiculares a un eje preferencial, por ejemplo \hat{z} , de manera que haya un bloque para cada procesador con $N \times N \times K$ puntos por bloque, donde $K = N/P$, con sus respectivos K_i (inicial) y K_f (final) para cada procesador. El beneficio de hacer la separación del volumen en una sola dirección es que la comunicación entre procesadores solo afecta a una de las direcciones [25]. En lo que respecta al cálculo del exponente de cancelación, es necesaria la interacción entre procesadores para poder calcular la función de partición para todas las escalas. Para comprender los distintos casos posibles, de acuerdo al tamaño y posición de la caja, esquematizamos a continuación los distintos casos.

Al programar en paralelo, en particular cuando se busca calcular una propiedad global de todos los datos, el beneficio del número de procesadores se maximiza cuando todos los procesadores realizan la misma tarea pero lo que cambia son la porción de los datos sobre los que trabaja cada uno de los procesadores. Este esquema de programación se llama “programa simple,

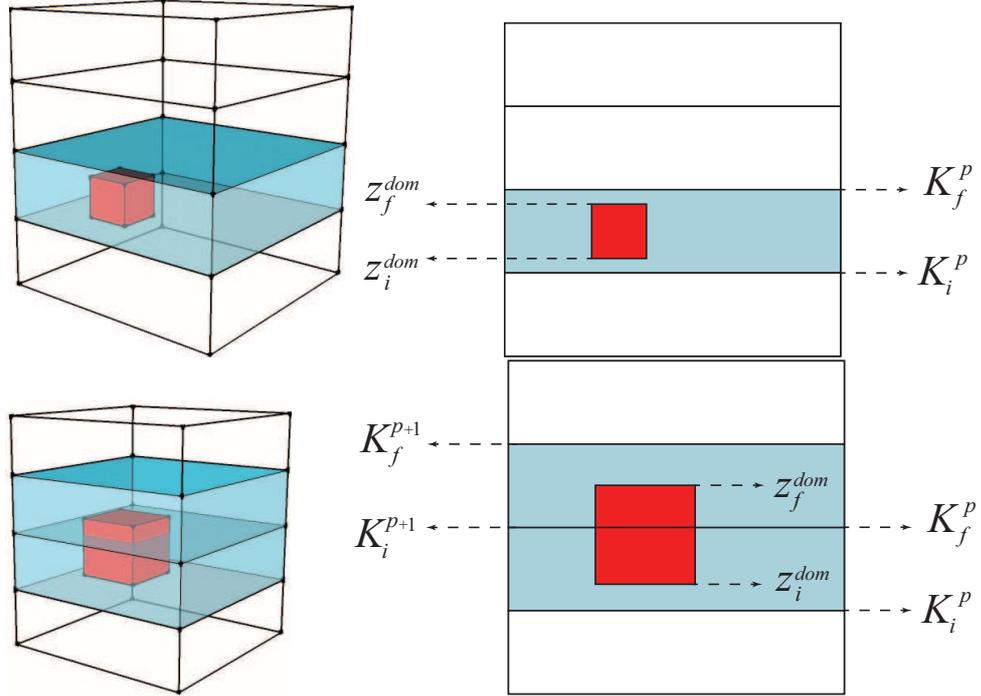


Figura 3.4: Esquema que ejemplifica como la caja en el cual se suman los valores de la magnitud, puede estar completamente incluido en un procesador (izquierda) o en varios (derecha).

datos múltiples” (“Single Program Multiple Data” o SPMD). Luego toda la información procesada se comparte mediante el envío de mensajes usando la biblioteca “Message Passing Interface” (MPI) [51]. La dificultad de la programación en paralelo yace en la sincronización para que los mismos datos no sean utilizados por mas de un procesador, y en realizar luego la unión de los datos procesados por mas de un procesador, como se muestra en los casos de la figura 3.4, ya que las cajas pueden residir en un único procesador, o ser compartidos por varios procesadores.

Para calcular la suma de los valores de la magnitud en la caja $Q_i(l)$ desarrollamos un código en el cual la región en que cada procesador suma los valores interiores del campo depende de la coordenada perpendicular a la separación de los procesadores, para nuestro caso \hat{z} . Todos los casos posibles pueden reducirse a los dos casos de la figura 3.4. El rango máximo en el que puede sumar cada procesador está condicionado por $N \times N \times (K_f^p - K_i^p)$ donde p indica el número de procesador. En general, queremos sumar sobre un dominio que estará encerrado en una región $(x_f^{dom} - x_i^{dom}, y_f^{dom} - y_i^{dom}, z_f^{dom} - z_i^{dom})$, donde dom indica el dominio de $Q_i(l)$. Consideremos el intervalo en

la dirección \hat{z} dado por z_f^p y z_i^p como el intervalo donde el procesador p (o ese procesador y sus vecinos) debe sumar valores de la magnitud. Este es el intervalo de interés y en el cual necesitamos decidir al rango de índices K que suma cada procesador. El mapa usado para la suma sobre el procesador p es el siguiente:

$$z_i^p = \begin{cases} K_i^p & \text{si } z_i^{dom} \leq K_i^p, \\ z_i^{dom} & \text{si no} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$z_f^p = \begin{cases} z_f^{dom} & \text{si } z_f^{dom} \leq K_f^p, \\ K_f^p & \text{si no} \end{cases} \quad (3.21)$$

Veamos que este condicionamiento es correcto para los dos casos de la figura 3.4. Para el caso en el cual la caja involucra un solo procesador, analizaremos primero que sucede con un procesador que no almacena localmente los datos de la caja, en particular tomaremos un procesador debajo del dominio, que llamaremos p_{sub} . En ese caso será $K_i^{p_{sub}} \leq z_i^{dom}$ y $K_f^{p_{sub}} \leq z_f^{dom}$, entonces $z_i^{p_{sub}} = z_i^{dom}$ y $z_f^{p_{sub}} = K_f^{p_{sub}}$, es decir, se sumarán los valores entre z_i^{dom} y $K_f^{p_{sub}}$ pero como $z_i^{dom} > K_f^{p_{sub}}$ entonces ese procesador no sumará ningún dato. Para el caso del procesador que almacena los datos de la caja será $z_i^p = z_i^{dom}$ y $z_f^p = z_f^{dom}$, que es el intervalo del dominio de la caja. Finalmente, el caso para un procesador que está arriba será equivalente al del de abajo: sumará en un intervalo nulo. Ahora veamos en el caso en que la caja involucra mas de un procesador, como dos procesadores p y $p+1$ suman los valores de la magnitud en la caja. Para el procesador p será $z_i^p = z_i^{dom}$ y $z_f^p = K_f^p$. Y para el procesador $p+1$, $z_i^{p+1} = K_i^{dom}$ y $z_f^{p+1} = z_f^{dom}$. Sumando los dos intervalos obtenemos la extensión total de la caja. Luego de esta operación se usan directivas de MPI para agregar los datos y obtener la suma total. Para todos los casos hay que incluir los valores en el espacio tridimensional generados por el agregado del plano xy , es decir, $x_f^{dom} - x_i^{dom}$, $y_f^{dom} - y_i^{dom}$. Estos valores no generan comunicación extra entre procesadores ya que se encuentran en el dominio almacenado por cada procesador.

3.2.3. Caso bidimensional y promedios verticales

En ocasiones es útil trabajar con valores promediados en alguna dirección espacial; en nuestro caso será frecuente usar la dirección de rotación \hat{z} . Una manera de realizar este cálculo es usando la cuenta ordinaria para la obtención del promedio, esto es, sumando todos los valores y dividiendo por el número de elementos. El inconveniente que tiene este método es que

Simulación	N	f	k_f	ν	Re	Ω	Ro
T1	256	TG	2	2×10^{-3}	900	8.00	0.03
T2	512	TG	4	8×10^{-4}	1100	0.4	1.4
T3	512	TG	4	8×10^{-4}	1100	1.6	0.35
T4	512	TG	4	8×10^{-4}	1100	8.00	0.07
A1	512	ABC	7-8	6.5×10^{-4}	1200	0.06	7.9
A2	512	ABC	7-8	6.5×10^{-4}	1200	7.0	0.07
A3	1536	ABC	7-8	1.6×10^{-4}	5100	9.00	0.06

Cuadro 3.1: Parámetros usados en la simulaciones. N es la resolución lineal de la grilla, f es el la fuerza generadora de la turbulencia, k_f es el número de onda del forzante, ν es la viscosidad cinemática, Re el numero de Reynolds, Ω la rotación del sistema y Ro el numero de Rossby.

para simulaciones con mucha resolución espacial se vuelve impracticable ya que es necesario disponer en memoria de todos los datos para los cuales se quiere obtener el promedio. Para evitar esto se recurre a una forma en la cual el promedio se va calculando en forma progresiva a medida que se van accediendo a porciones de la totalidad de los datos.

Imaginemos que queremos calcular el promedio en la dirección de rotación \hat{z} de la magnitud $f(\mathbf{x})$ en un volumen grillado por $N \times N \times N$ puntos. Primero dividimos el volumen en N planos de $N \times N$ puntos, perpendiculares al eje \hat{z} . Ahora podemos calcular el promedio cargando en memoria cada plano, sumando todos los valores en el plano, y almacenando el resultado final en una variable. Sucesivamente se cargan los demás planos y se suman los totales parciales a la misma variable. Al terminar con todos los planos, se divide el resultado por el número total de datos. El resultado final será usado para calcular el exponente de cancelación con el mismo método que en las secciones anteriores.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos a partir del análisis de las simulaciones mencionadas en el capítulo anterior. Las seis simulaciones consideradas difieren en el número de puntos de grilla, en el forzado mecánico y en la rotación que tiene el flujo turbulento. Consideramos para el análisis las componentes cartesianas del campo de velocidad, vorticidad y la helicidad, obteniendo los resultados indicados en la tabla 4.1. Para realizar el análisis sobre el exponente de cancelación de cada componente del campo inferimos el rango inercial a partir del espectro de energía en función del número de onda k de cada simulación.

4.1. Simulaciones sin rotación

En esta sección mostramos los resultados de las simulaciones en las cuales la rotación del sistema es nula o despreciable frente al movimiento del fluido.

La forma de los espectros de energía $E(k)$ para simulaciones de flujos turbulentos forzados es básicamente la misma en todos los casos, y está dada por los siguiente rangos en forma creciente en el número de onda: un máximo en el número de onda del forzado, o inmediatamente a continuación de este; luego, un rango inercial donde el flujo de energía es aproximadamente constante, esto es, el rango inercial que responde a la ley de 4/5 de Kolmogorov; y finalmente una caída abrupta del espectro donde la energía es disipada por la viscosidad interna del fluido, que corresponde a la escala de disipación dada por la ecuación (2.22). En términos espaciales esto puede verse como un forzado en las escalas mas grandes del sistema, un rango inercial en las escalas intermedias, y disipación en las escalas mas chicas donde la viscosidad interna se hace preponderante. Para poder apreciar el rango inercial en donde se produce la cascada de energía, compensamos el espectro de energía $E(k)$

Simulación	κ_{v_x}	κ_{v_y}	κ_{v_z}
T1	$0,15 \pm 0,07$	$0,03 \pm 0,03$	$0,6 \pm 0,2$
T2	$0,7 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,96 \pm 0,09$
T3	$0,7 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,8 \pm 0,1$
T4	$0,14 \pm 0,02$	$0,15 \pm 0,02$	$0,7 \pm 0,1$
A1	$0,7 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$
A2	$0,09 \pm 0,02$	$0,09 \pm 0,04$	$0,35 \pm 0,04$
A3	$0,024 \pm 0,007$	$0,06 \pm 0,01$	$0,31 \pm 0,02$
T4*	$0,07 \pm 0,02$	$0,07 \pm 0,03$	$0,7 \pm 0,1$
A2*	$0,08 \pm 0,03$	$0,08 \pm 0,05$	$0,31 \pm 0,07$
A3*	$0,03 \pm 0,01$	$0,05 \pm 0,02$	$0,25 \pm 0,06$

Simulación	κ_{ω_x}	κ_{ω_y}	κ_{ω_z}	κ_h
T1	$0,7 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,2$	$0,4 \pm 0,1$	$0,8 \pm 0,1$
T2	$1,2 \pm 0,1$	$1,22 \pm 0,09$	$0,9 \pm 0,1$	$0,96 \pm 0,09$
T3	$1,2 \pm 0,1$	$1,17 \pm 0,09$	$0,9 \pm 0,1$	$0,8 \pm 0,1$
T4	$1,0 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,1$	$0,60 \pm 0,03$	$0,7 \pm 0,1$
A1	$0,9 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$
A2	$0,8 \pm 0,1$	$0,8 \pm 0,1$	$0,36 \pm 0,04$	$0,35 \pm 0,04$
T4*	$1,3 \pm 0,1$	$1,2 \pm 0,1$	$0,31 \pm 0,04$	$0,7 \pm 0,1$
A2*	$0,7 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,30 \pm 0,07$	$0,22 \pm 0,06$

Cuadro 4.1: Exponentes de cancelación κ para todas las simulaciones, para las diferentes componentes del campo de velocidad y vorticidad, y para la helicidad. Las simulaciones con asterisco indican que κ fue calculado también a partir del campo promediado a lo largo del eje de rotación

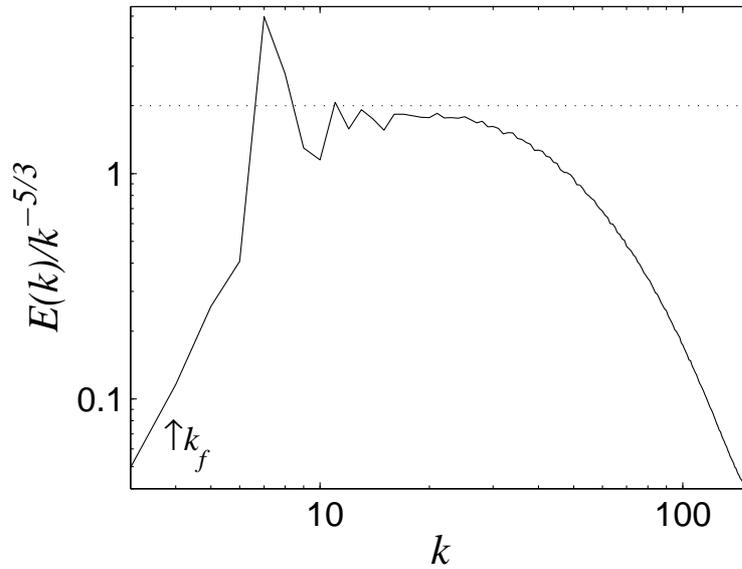


Figura 4.1: Espectro de energía de un flujo turbulento isótropo y homogéneo compensado por $k^{-5/3}$ en función del número de onda k en escala logarítmica, para la simulación T3. Como referencia introducimos una recta horizontal para identificar el intervalo donde se encuentra el rango inercial. El número de onda del forzado se identifica mediante una flecha vertical bajo el espectro.

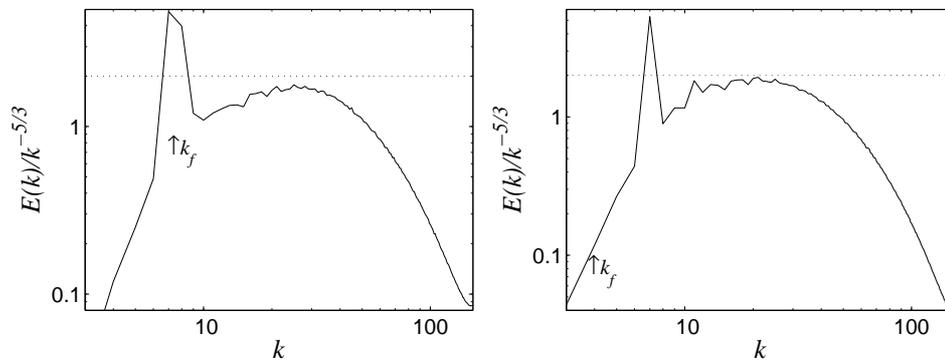


Figura 4.2: Espectros de energía de un flujo turbulento isótropo y homogéneo compensado por $k^{-5/3}$ en función del número de onda k en escala logarítmica, para la simulación A1 (izquierda) y T3 (derecha). Como referencia introducimos una recta horizontal para identificar el intervalo donde el rango es inercial. El número de onda del forzado se identifica mediante una flecha vertical bajo el espectro.

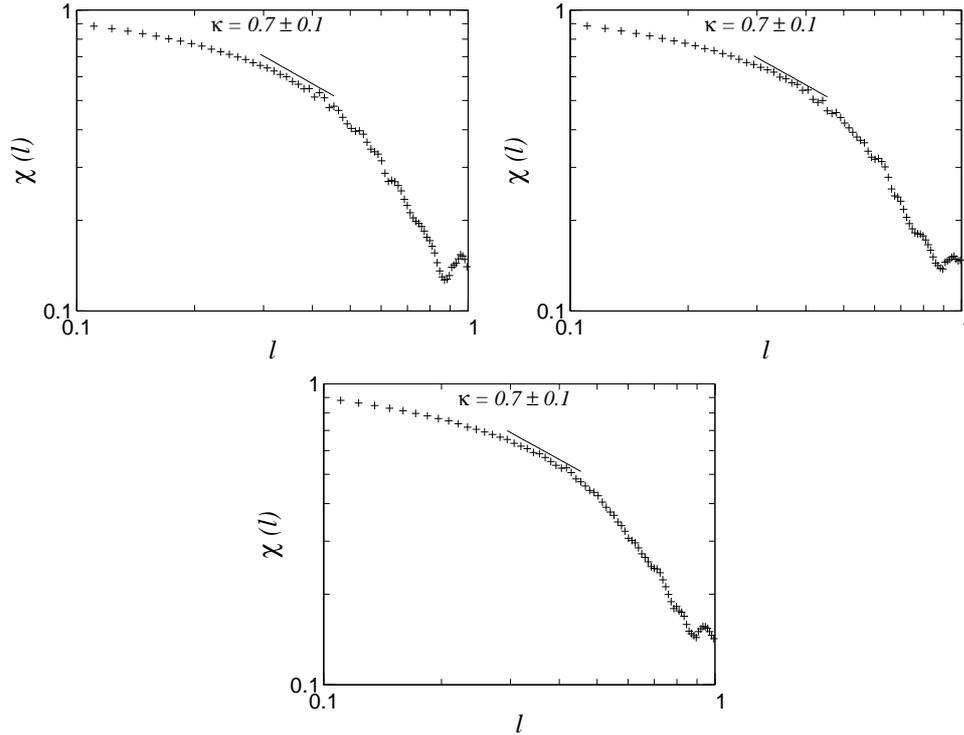


Figura 4.3: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para las componentes del campo de velocidad v_x (arriba izquierda), v_y (arriba derecha) y v_z (abajo) de la simulación A1. Cada gráfico muestra una línea recta que indica la pendiente de la función para valores de $\chi(l)$ en escalas asociadas a valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de dicha pendiente corresponde al exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

en función del número de onda k con la ley de potencias que cada espectro debería obedecer, de manera que en el intervalo donde el espectro de energía es inercial el mismo quede horizontal, facilitando su identificación.

En la figura 4.1 mostramos el espectro de energía en función del número de onda para la simulación T3 compensado con la ley de potencias $k^{-5/3}$, que corresponde a la ley de Kolmogorov para un flujo turbulento, isótropo y homogéneo considerando invarianza de escala en el rango inercial. Identificamos el número de onda del forzado del sistema mediante una flecha vertical bajo el espectro de energía, y mostramos como referencia una línea horizontal a fin de facilitar la identificación del intervalo en el que presumiblemente se encuentra el rango inercial.

Para el siguiente análisis determinamos en forma aproximada el intervalo

en el cual el espectro de energía $E(k)$ se comporta en forma compatible con una ley de potencias con los valores $(k_{min}, k_{max}) = (11, 31)$, que corresponde al intervalo espacial $(x_{min}, x_{max}) = (0, 20, 0, 57)$, para la simulación T3. Como fue explicado, la identificación de este intervalo lo hicimos seleccionando los valores en el cual el espectro es horizontal, teniendo precaución de descartar los valores contaminados por la acción del forzado.

En la figura 4.2 mostramos los espectros de energía compensados para las simulaciones A1 y T3. Podemos nuevamente distinguir el rango inercial a partir de los valores en los cuales el espectro compensado se hace aproximadamente horizontal. En el espectro de la simulación A1 observamos que el rango inercial no se observa tan claramente como lo hace en las simulaciones T2 y T3; esto se debe probablemente a que el forzado en la simulación A1 actúa en escalas mas pequeñas, resultando en un número de Reynolds menor, y en una menor separación de escalas y, por lo tanto, un rango inercial mas angosto.

De la figura 4.2, podemos extraer una estimación del rango inercial en las simulaciones T3 y A1. Los intervalos corresponden a los números de onda $(k_{min}, k_{max}) = (11, 31)$ y $(k_{min}, k_{max}) = (11, 34)$ para T3 y A1 respectivamente. De manera equivalente $(x_{min}, x_{max}) = (0, 20, 0, 57)$ y $(x_{min}, x_{max}) = (0, 18, 0, 57)$ para las simulaciones T3 y A1.

A partir de los datos provenientes de las simulaciones, obtuvimos la función de partición $\chi(l)$ para las componentes del campo de interés en función de la escala l . Los resultados se muestran en la figura 4.3 para las componentes del campo de velocidad v_x , v_y y v_z de la simulación A1. Lo primero que debemos notar es que para valores pequeños de l la función de partición tiende asintóticamente a uno; esto corresponde, por lo visto en la sección 3.2, al caso en el que el flujo es suave y está completamente correlacionado, que es el comportamiento esperado para el rango disipativo. Para las escalas mas grandes la función de partición se ve afectada por el forzado del sistema ($l \approx 1$). Nosotros estudiaremos las escalas intermedias, dadas por el rango donde se encuentra la cascada de energía.

Para calcular la ley de potencias que sigue la función de partición en función de la escala l en el intervalo correspondiente al rango inercial del espectro de energía $E(k)$, utilizamos el método de cuadrados mínimos. Básicamente ajustamos mediante una función lineal los valores del logaritmo de la función de partición $\log(\chi)$ en función de logaritmo de la escala $\log(l)$. La pendiente del ajuste lineal representa la ley de potencias que sigue la función de partición $\chi(l)$ para los valores correspondientes al rango inercial, esto es, el exponente de cancelación κ definido en la sección 3.2 salvo por un signo.

Hallamos los valores del exponente de cancelación $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ para los tres campos de velocidades v_x , v_y y v_z de la simulación A1, tal como se

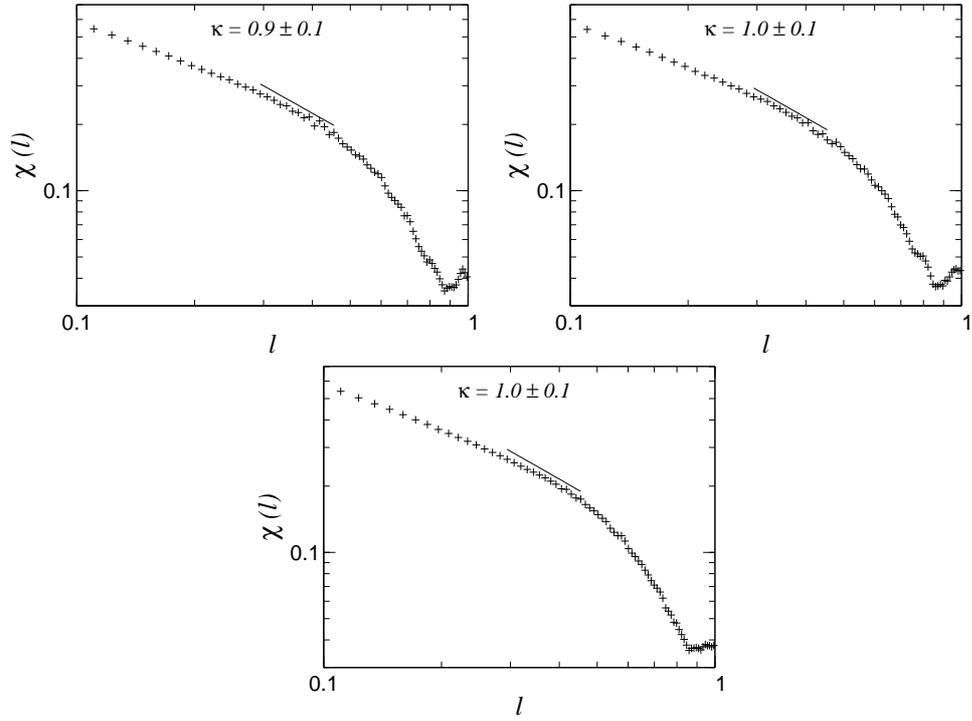


Figura 4.4: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para los campos de vorticidades ω_x (arriba izquierda), ω_y (arriba derecha) y ω_z (abajo) de la simulación A1. Cada gráfico ilustra una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

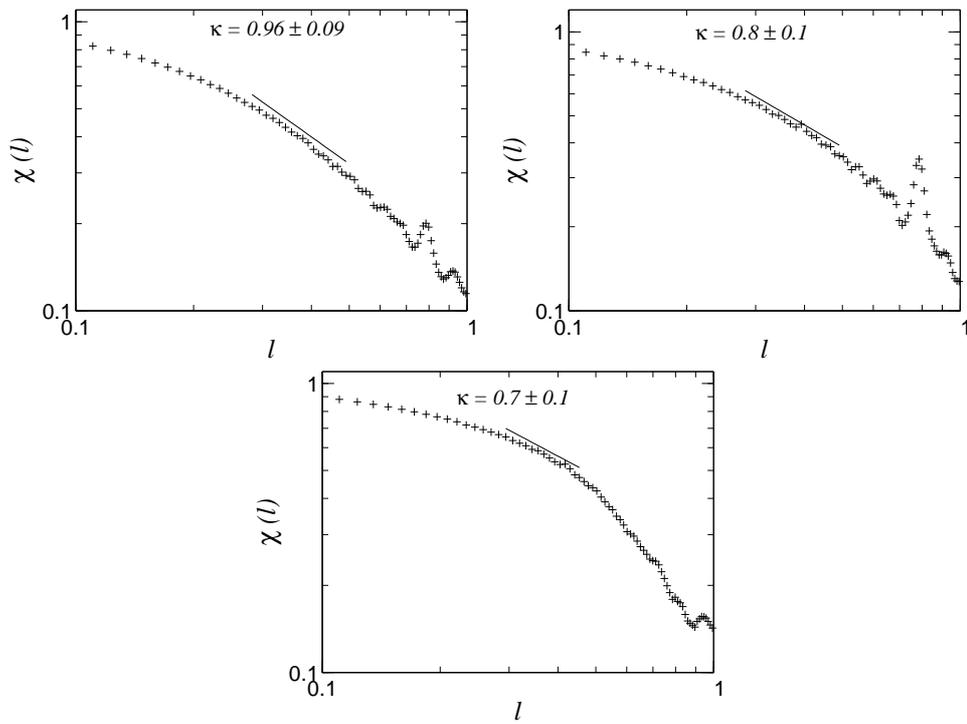


Figura 4.5: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para la helicidad H en las simulaciones T2 (arriba izquierda), T3 (arriba derecha) y A1 (abajo). En cada gráfico, la línea recta indica la pendiente de la función para valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

muestra en la figura 4.3 y en la tabla 4.1. Mediante una recta sobre cada gráfico indicamos la pendiente correspondiente al exponente de cancelación κ . Notar que para las tres componentes del campo de velocidad obtenemos el mismo valor del exponente de cancelación κ . Este resultado es consecuencia del hecho de que el sistema prácticamente no siente la rotación, por lo cual no hay ninguna dirección privilegiada; es decir, el flujo es isótropo y no se produce ordenamiento de estructuras en ninguna dirección privilegiada. Para las simulaciones restantes donde la rotación es pequeña o nula, obtuvimos también valores del exponente de cancelación κ , dentro de las barras de error, del mismo orden para todas las direcciones del campo de velocidad. Para las simulación T2 encontramos los valores $\kappa = 0,7 \pm 0,1$, $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,96 \pm 0,09$ para v_x , v_y y v_z respectivamente, mientras que para la simulación T3 estos valores son $\kappa = 0,7 \pm 0,1$, $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,8 \pm 0,1$. Las pequeñas diferencias obtenidas para la componente z de la velocidad pueden deberse a que, en el forzado de Taylor-Green, la componente z no es forzada en forma directa. Podemos observar también en la figura 4.3 que el rango donde $\chi(l)$ satisface una ley de potencias es ligeramente menor que el rango inercial en el espectro de energía $E(k)$.

La función de partición $\chi(l)$ del campo de vorticidad de la simulación A1 puede observarse en la figura 4.4, donde nuevamente indicamos la pendiente correspondiente al exponente de cancelación κ mediante una recta en el intervalo donde el espectro de energía es inercial. El comportamiento de $\chi(l)$ para valores de l pequeños es equivalente al caso del campo de velocidad.

A partir de la función de partición $\chi(l)$ y usando el método de cuadrados mínimos, obtuvimos los valores $\kappa = 0,9 \pm 0,1$, $\kappa = 1,0 \pm 0,1$ y $\kappa = 1,0 \pm 0,1$ respectivamente para las componentes ω_x , ω_y y ω_z . Al igual que el campo de velocidad, el campo de vorticidad no presenta diferencias en el exponente de cancelación κ en ninguna de las direcciones cartesianas. Nuevamente el intervalo que satisface la ley de potencias es menor que el del rango inercial en el espectro de energía.

En la figura 4.5 presentamos la función de partición χ en función de l para la helicidad de las simulaciones T2, T3 y A1. Calculamos el exponente de cancelación, obteniendo $\kappa = 0,96 \pm 0,09$, $\kappa = 0,8 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,7 \pm 0,1$, para las simulaciones T2, T3 y A1 respectivamente.

Lo primero que notamos en la figura 4.5 es que, en el rango de los valores utilizados para calcular el exponente de cancelación κ , el comportamiento de $\chi(l)$ tiene un aspecto muy similar al de una ley de potencia. Este resultado condice con el hecho de que la helicidad se conserva en el rango inercial y en el límite $Re \rightarrow \infty$ es un invariante dentro de dicho intervalo. Al comparar los resultados del exponente de cancelación κ con los obtenidos en otros trabajos [30], observamos que para simulaciones de la misma resolución obtuvieron

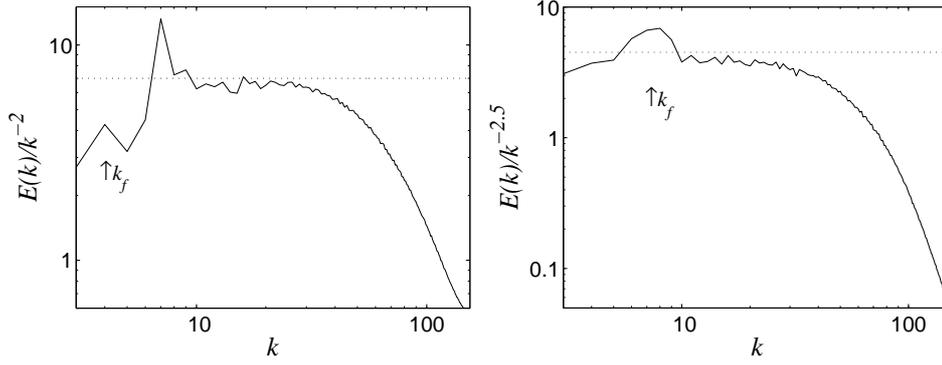


Figura 4.6: Espectros de energía de flujos turbulentos con rotación en función del número de onda k en escala logarítmica para la simulación T4 (izquierda) y A2 (derecha), compensados con k^{-2} y $k^{-2.5}$ respectivamente. Como guía introducimos una recta horizontal para identificar el intervalo donde el rango es inercial. El número de onda del forzado se identifica mediante una flecha vertical bajo el espectro.

$\kappa = 0,77 \pm 0,03$, $\kappa = 0,82 \pm 0,02$ para forzados TG y ABC respectivamente, los cuales están dentro de las barras de error y en buen acuerdo con los valores hallados en este trabajo. Esto nos sirve de corroboración de que el método de cálculo de la función de partición χ es confiable.

4.2. Simulaciones con rotación

En esta sección analizamos flujos turbulentos homogéneos con rotación; nos centramos primero en dos simulaciones con número de Rossby $Ro \approx 0,1$ con forzados TG y ABC. El hecho de que haya rotación en el flujo hace que se rompa la isotropía y esto genera que la cascada de energía se comporte en forma diferente a cuando no hay rotación presente. Como vimos en la sección 2.3 el flujo turbulento en un sistema rotante tiende a volverse bidimensional lo cual genera una cascada inversa de energía, esto es, transferencia de energía de los k grandes hacia los mas chicos. Sin embargo, al contrario que en un flujo $2D$, no toda la energía inyectada al sistema sigue la cascada inversa. Una parte importante de la energía inyectada se transfiere a escalas mas pequeñas a traves de una cascada directa con espectro $\sim k^{-2}$.

Este espectro es el resultado de la presencia de ondas en el flujo rotante, que retrasan la cascada directa de energía, resultando en una pendiente mas empinada que en el caso de turbulencia isótropa y homogénea. Además, la pendiente del espectro va a depender de que el flujo sea o no helicoidal, es decir, si analizamos simulaciones con forzado ABC o TG [49], siendo mas

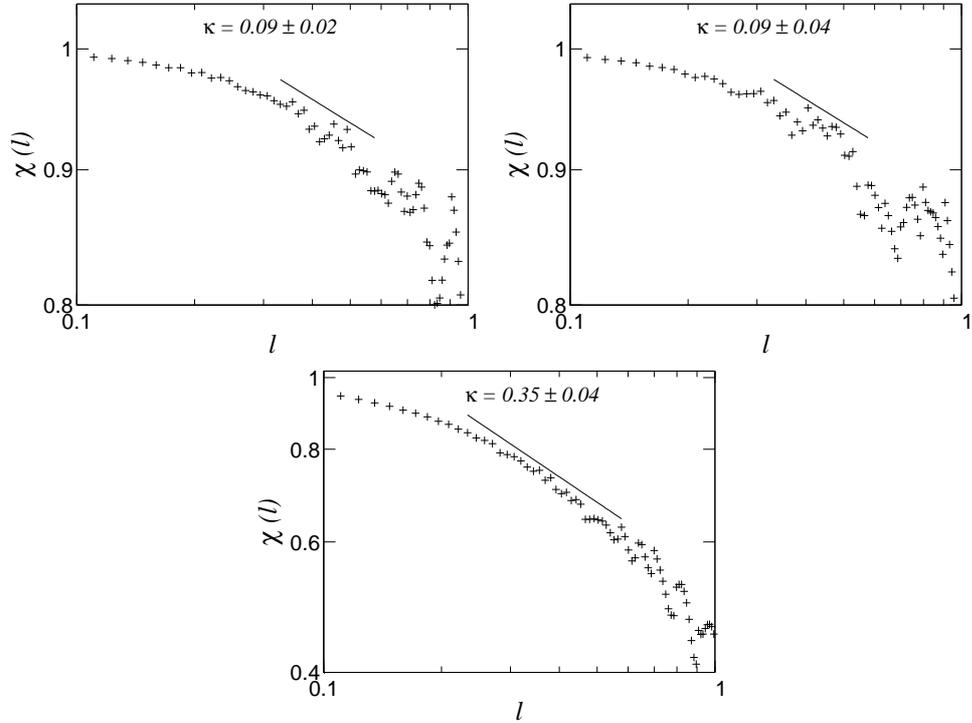


Figura 4.7: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para las componentes del campo de velocidad v_x (arriba izquierda), v_y (arriba derecha) y v_z (abajo) de la simulación A2. Cada figura tiene una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico. Notar que solo la componente z es compatible con una ley de escalas.

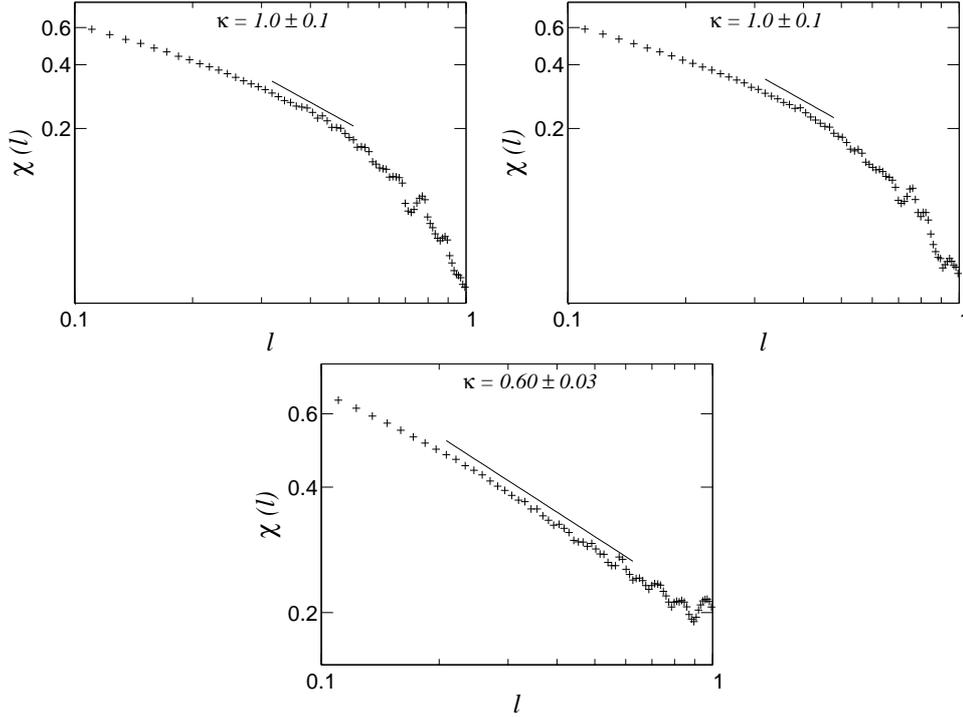


Figura 4.8: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para las componentes del campo de vorticidad ω_x (arriba izquierda), ω_y (arriba derecha) y ω_z (abajo) de la simulación T4. La línea recta indica la pendiente de la función para valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

empinada en el primer caso.

En la figura 4.6 presentamos los espectros de energía $E(k)$ en función del número de onda k para flujos con rotación. Al igual que los espectros de energía de flujos sin rotación, obtuvimos el rango inercial luego de compensar el espectro por la ley de potencias que estos obedecen. Los espectros fueron compensados con k^{-2} y $k^{-2,5}$ para las simulaciones T4 y A2 respectivamente [47].

A partir de los espectros de energía $E(k)$ de la figura 4.6 identificamos el rango donde estos son aproximadamente inerciales. Los intervalos que utilizamos corresponden a los números de onda $(k_{min}, k_{max}) = (9, 26)$ y $(k_{min}, k_{max}) = (11, 31)$ para T4 y A2 respectivamente, o en términos de la escala espacial $(x_{min}, x_{max}) = (0,24, 0,69)$ y $(x_{min}, x_{max}) = (0,20, 0,57)$. La extensión del rango inercial no varía notablemente entre las simulaciones con y sin rotación (aunque la ley de potencias cambia).

Mostramos la función de partición en función de la escala $\chi(l)$ de las componentes del campo de velocidad v_x , v_y y v_z para la simulación A2 en la figura 4.7. Los valores que obtuvimos del exponente de cancelación son respectivamente $\kappa = 0,09 \pm 0,02$, $\kappa = 0,09 \pm 0,04$ y $\kappa = 0,35 \pm 0,04$.

Lo primero que observamos en la figura 4.7 es que el exponente de cancelación κ para v_x y para v_y tienen el mismo valor, mientras que para v_z el resultado dista de este valor. Además la componente z del campo muestra un claro comportamiento de ley de escala, mientras que las demás componentes no lo hacen. Esto es algo que esperabamos, debido a que por el efecto de la rotación los modos se dividen en modos lentos (aquellos con $k_z = 0$), y en los modos rápidos, por lo cual es razonable obtener resultados distintos para la componente paralela al eje de rotación. Por lo visto en la sección 2.3 el efecto de rotación sobre el flujo hace que en el límite de $Ro \rightarrow 0$ este se comporte como un flujo en dos dimensiones para el campo de velocidad promediado vertical, provocando que las componentes del campo de velocidad perpendiculares al eje de rotación sigan la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones [15]. Mientras tanto, la velocidad vertical promediada a lo largo de la dirección del eje de rotación satisface la ecuación de un escalar pasivo, lo que significa que tiene una dinámica independiente. Además, en el límite de número de Reynolds infinito, es un invariante en el rango inercial, por lo que esperamos que siga una ley de potencias en este rango. Esto no es lo que sucede con las componentes del campo de velocidad v_x y v_y ya que justamente son componentes de la velocidad horizontal, e independientemente no son invariantes.

Para la simulación T4 obtuvimos los siguientes valores del exponente de cancelación para las componentes del campo de velocidad v_x , v_y y v_z respectivamente: $\kappa = 0,14 \pm 0,02$, $\kappa = 0,15 \pm 0,02$ y $\kappa = 0,7 \pm 0,1$. Se repite la conducta de κ en v_x y v_y respecto a v_z mencionada arriba.

En la figura 4.8 presentamos $\chi(l)$ para las componentes del campo de vorticidad ω_x , ω_y y ω_z de la simulación T4, obteniendo los valores respectivos de $\kappa = 1,0 \pm 0,1$, $\kappa = 1,0 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,60 \pm 0,03$. Observamos que nuevamente el valor de κ para la componente del campo de vorticidad ω_z difiere de los valores de κ para ω_x y ω_y ; esto se debe probablemente a la misma razón que en el campo de velocidades: la ecuación que rige el movimiento de ω_z promediada en la dirección vertical es la misma que satisface v_z promediada en la dirección vertical, es decir, la ecuación de un escalar pasivo (para mas detalles ver [15]). Las componentes horizontales no son independientes y por lo tanto individualmente no satisfacen necesariamente una ley de potencias.

Para la simulación A2 encontramos los valores del exponente de cancelación $\kappa = 0,8 \pm 0,1$, $\kappa = 0,8 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,36 \pm 0,04$ de las componentes del campo de vorticidad ω_x , ω_y y ω_z respectivamente.

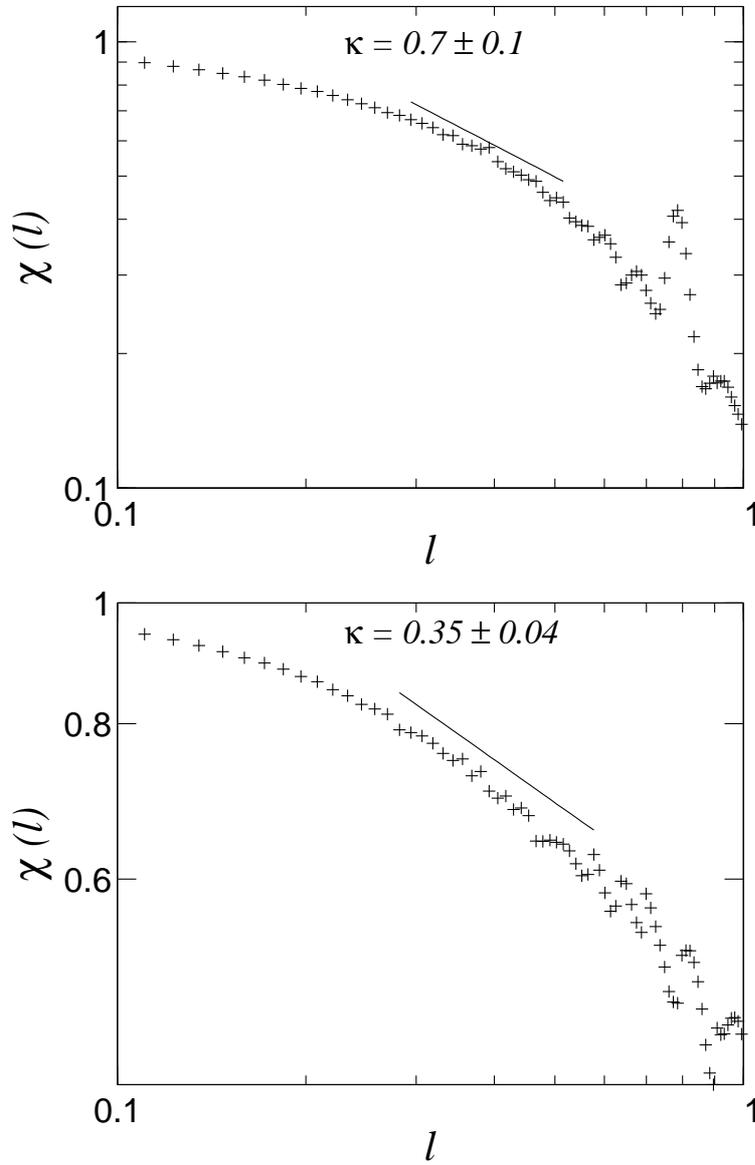


Figura 4.9: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para la helicidad H de las simulaciones T4 (arriba) y A2 (abajo). En cada gráfico la línea recta indica la pendiente de la función para valores donde el rango es aproximadamente inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

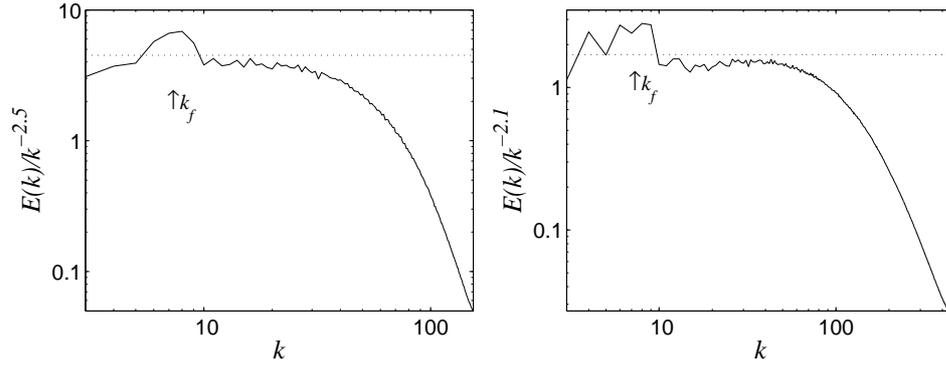


Figura 4.10: Espectros de energía compensados de flujos turbulentos con rotación en función del número de onda k en escala logarítmica, para las simulaciones A2 (izquierda) y A3 (derecha). Como guía introducimos una recta horizontal para identificar el intervalo donde el rango es inercial. El número de onda del forzado se identifica mediante una flecha vertical bajo el espectro.

Si nos concentramos solo en la componente vertical de los campos, que es la que muestra una ley de escalas mas clara en $\chi(l)$, los valores encontrados del exponente de cancelación para v_z y ω_z son $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,60 \pm 0,03$ respectivamente para la simulación T4 y $\kappa = 0,35 \pm 0,04$ y $\kappa = 0,36 \pm 0,04$ para la simulación A2. En otras palabras, los valores del exponente de cancelación del campo de velocidad y de vorticidad para la componente z resultan iguales dentro de las barras de error para cada simulación; esto confirma lo dicho anteriormente, que la dinámica que satisfacen la velocidad y la vorticidad promediada en el eje vertical es la misma. Aunque por el momento no estamos analizando estas magnitudes promediadas en el eje vertical, la similitud es producto de la bidimensionalización del flujo turbulento en un sistema rotante. Es interesante también hacer notar que la helicidad parece tener un efecto importante en el valor de κ , lo que puede esperarse ya que la helicidad cambia la ley de escalas que sigue el espectro de energía.

Presentamos la función de partición $\chi(l)$ para la helicidad de las simulaciones T4 y A2 en la figura 4.9. Obtuvimos, luego de hacer el ajuste lineal sobre los valores que corresponden al rango inercial del espectro de energía $E(k)$, los exponentes de cancelación $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ y $\kappa = 0,35 \pm 0,04$ para las simulaciones T4 y A2 respectivamente.

Al igual que en las simulaciones de flujos turbulentos isotrópos y homogéneos, la helicidad H es un invariante ideal de la ecuación de Euler, es decir, de la ecuación de Navier-Stokes sin viscosidad. Como resultado, en el caso viscoso sufre una cascada, y esto resulta en una ley de potencias en el rango inercial de la función de partición como se observa en la figura 4.9.

De los distintos campos analizados para calcular el exponente de cancelación κ podemos decir que las componentes horizontales de la velocidad y de la vorticidad no parecen seguir una clara ley de potencias (ya sea porque el rango de escala compatible con este comportamiento es angosto, porque la función $\chi(l)$ presenta fuertes fluctuaciones, o porque aún luego de hacer un ajuste en el rango angosto de escalas se obtuvieron valores de κ pequeños). Esto indica que estas componentes de los campos no son singulares de signo. Por el contrario, la componente vertical de la velocidad y la vorticidad en conjunto con la helicidad si manifiestan un comportamiento acorde a una ley de potencias en el rango inercial.

Por lo visto en la sección 3.2.1, podemos obtener información de la geometría de las estructuras correlacionadas de los campos mediante un análisis geométrico y del valor del exponente de cancelación. Además, necesitamos el exponente de Holder de la velocidad que podemos calcular a través de un análisis dimensional, esto es $E(k) \sim k^{-\alpha} \sim \frac{\delta v^2}{k}$ entonces $\delta v^2 \sim k^{-\alpha+1} \sim l^{\alpha-1}$; luego considerando invarianza de escalas, obtenemos $h = \frac{\alpha-1}{2}$, donde h sale de la relación de la función de estructura de primer orden $\delta v \sim l^h$. Como en el caso de un flujo turbulento con rotación $\alpha = 2$, entonces $h = 1/2$. La dimensión de las estructuras resulta

$$D = d - 2(\kappa + h), \quad (4.1)$$

donde D es la dimensión fractal y d la dimensión del sistema, en este caso $d = 3$.

La dimensión fractal de las estructuras encontradas es $D = 0,6 \pm 0,2$, $D = 0,80 \pm 0,06$ y $D = 0,6 \pm 0,2$ para v_z , ω_z y H respectivamente, para la simulación T4, y $D = 0,80 \pm 0,08$, $D = 0,7 \pm 0,1$ y $D = 0,80 \pm 0,08$ para v_z , ω_z y H respectivamente, para la simulación A2. Estos valores, cercanos a uno, son compatibles con estructuras con forma de columna.

4.3. Dependencia con el número de Reynolds

4.3.1. Simulaciones con helicidad

En esta sección mostramos como la resolución espacial de las simulaciones, y el número de Reynolds, modifica los valores de las magnitudes que se calculan.

En la figura 4.10 mostramos el espectro de energía $E(k)$ para resoluciones lineales de $N = 512$ y $N = 1536$ puntos de grilla para flujos turbulentos con rotación correspondientes a las simulaciones A2 y A3 respectivamente. Las simulaciones tienen número de Reynolds creciente.

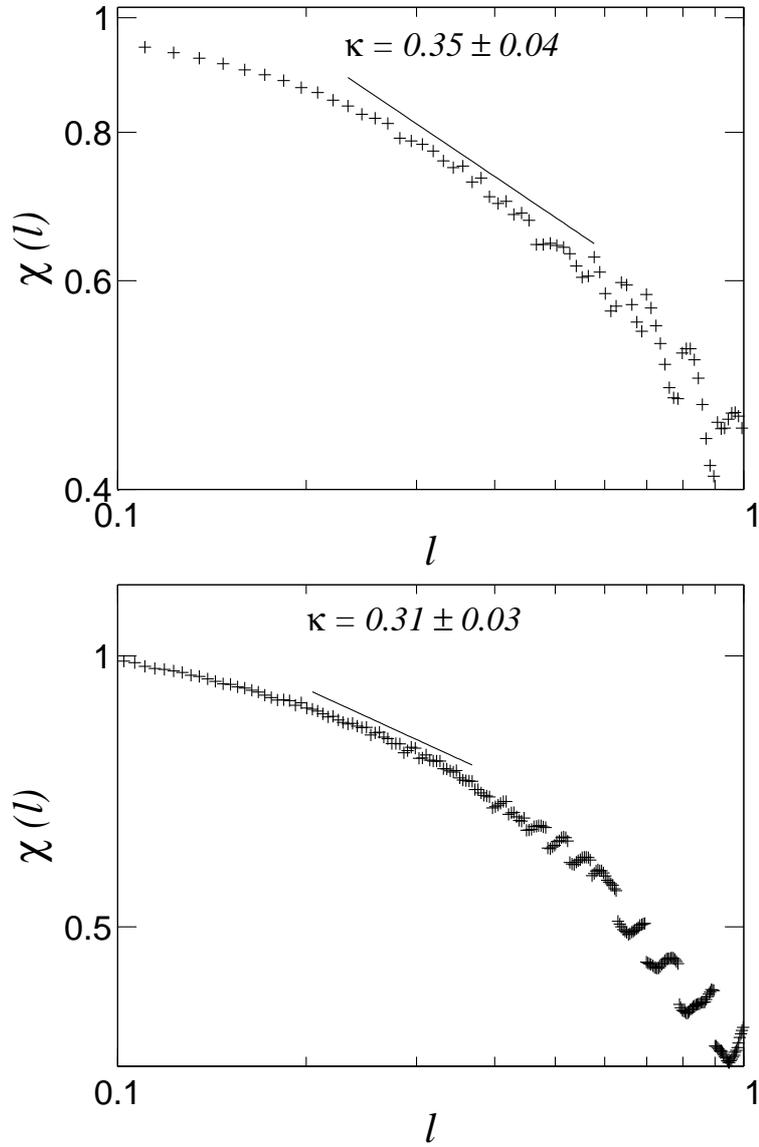


Figura 4.11: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para v_z de las simulaciones A2 (arriba) y A3 (abajo). Cada gráfico contiene una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es compatible con comportamiento inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

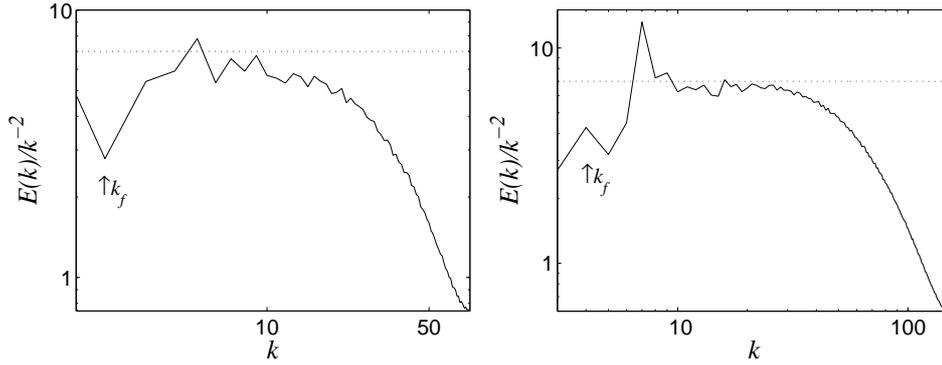


Figura 4.12: Espectros de energía compensados de flujos turbulentos con rotación en función del número de onda k en escala logarítmica, para las simulaciones T1 (izquierda) y T4 (derecha). Como guía introducimos una recta horizontal para identificar el intervalo donde el rango es inercial. El número de onda del forzado se identifica mediante una flecha vertical bajo el espectro.

Podemos ver en la figura 4.10 que los rangos en el cual el espectro de energía es compatible con un rango inercial aumentan en función del número de Reynolds. Los valores obtenidos para las simulaciones A2 y A3 son $(k_{min}, k_{max}) = (11, 31)$ y $(k_{min}, k_{max}) = (14, 45)$ respectivamente, que corresponden a los valores $(x_{min}, x_{max}) = (0, 20, 0, 57)$ y $(x_{min}, x_{max}) = (0, 13, 0, 44)$. La variación en las escalas espaciales grandes está relacionada con el mecanismo forzante de la simulación, en particular con el número de onda del forzante k_f , mientras que la ampliación del rango inercial en los valores pequeños de la escala espacial está asociada al hecho de que el aumento de la resolución espacial de las simulaciones permite aumentar el número de Reynolds.

Observamos en la figura 4.11 la función de partición $\chi(l)$ de la componente z del campo de velocidad de las simulaciones A2 y A3, donde obtuvimos los valores del exponente de cancelación $\kappa = 0,35 \pm 0,04$ y $\kappa = 0,31 \pm 0,03$ respectivamente.

Los valores del exponente de cancelación de las simulaciones en la figura 4.11 son consistentes debido a que estos coinciden dentro de las barras de error, y el aumento de resolución reduce el error en la estimación del valor del exponente de cancelación.

4.3.2. Simulaciones sin helicidad

En esta sección comparamos, al igual que en la sección anterior, dos simulaciones con distintas resoluciones espaciales $N = 256$ y $N = 512$, ambas con rotación y con forzado TG, es decir, sin inyección de helicidad neta.

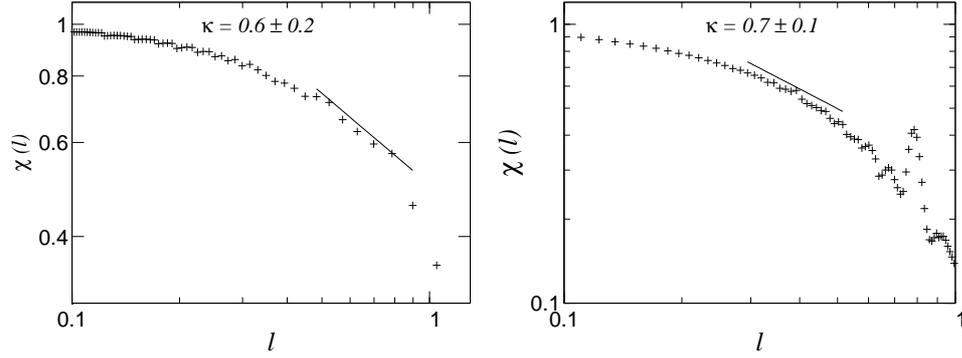


Figura 4.13: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para v_z de las simulaciones T1 (izquierda) y T4 (derecha). Cada gráfico contiene una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es compatible con comportamiento inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

En la figura 4.12 mostramos el espectro de energía $E(k)$ de las simulaciones T1 y T4. Las simulaciones tienen número de Reynolds creciente.

Notemos en la figura 4.12 que los rangos en el cual el espectro de energía es compatible con un rango inercial se amplía hacia las escalas mas pequeñas en función del número de Reynolds, al igual que en el caso de las simulaciones con helicidad. Los valores obtenidos para las simulaciones T1 y T4 son $(k_{min}, k_{max}) = (6, 16)$ y $(k_{min}, k_{max}) = (10, 31)$ respectivamente, que corresponden a los valores $(x_{min}, x_{max}) = (0, 39, 1, 04)$ y $(x_{min}, x_{max}) = (0, 20, 0,62)$

Presentamos en la figura 4.13 la función de partición $\chi(l)$ de la componente z del campo de velocidad de las simulaciones T1 y T4, donde obtuvimos los valores del exponente de cancelación respectivamente $\kappa = 0,6 \pm 0,2$ y $\kappa = 0,7 \pm 0,1$. Nuevamente las simulaciones muestran que el exponente de cancelación es el mismo, dentro de las barras de error, y el aumento de resolución reduce el error en la estimación del valor de κ .

Es importante destacar que la simulación T1 con resolución de $N = 256$ puntos de grilla fue utilizada también para corroborar el método de cálculo de la función de partición del código paralelo a través de la comparación con resultados provenientes de un código serial desarrollado inicialmente en Matlab.

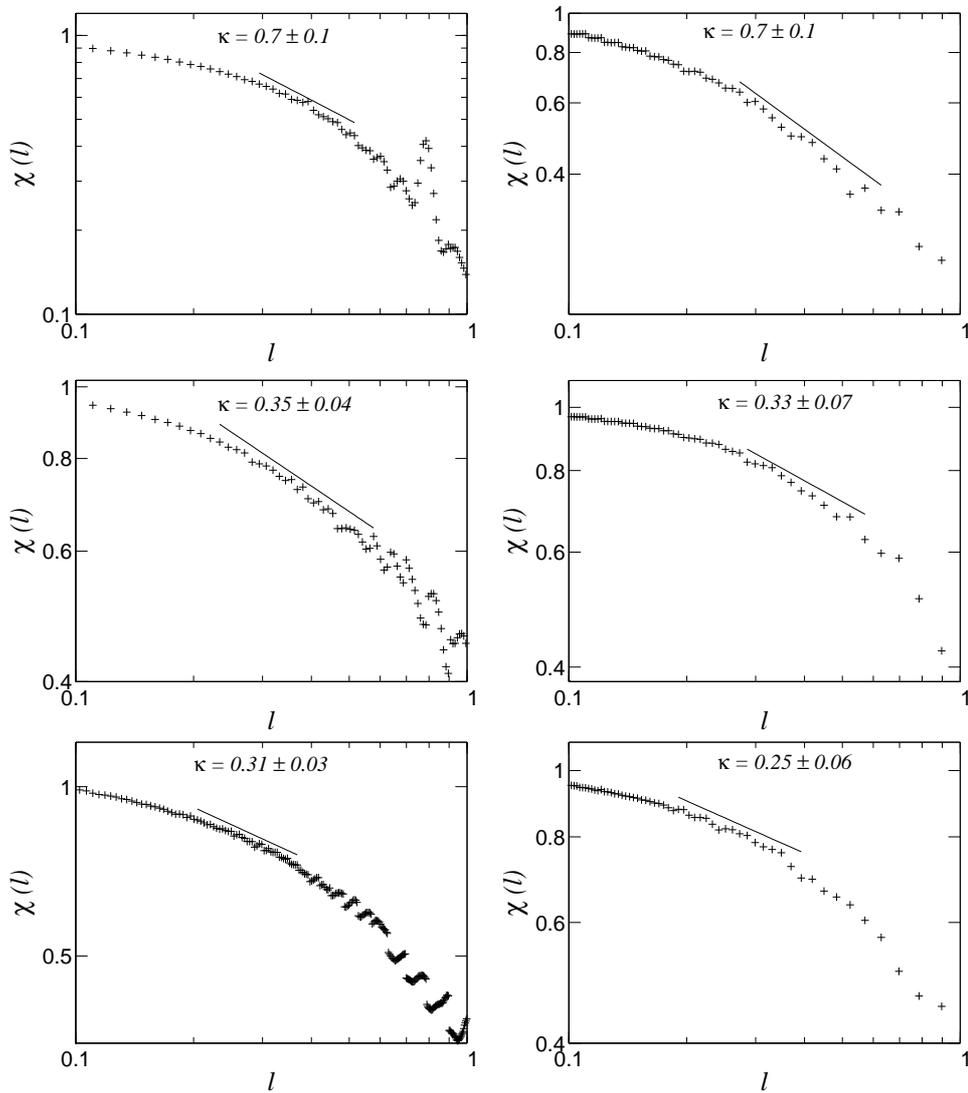


Figura 4.14: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para v_z (izquierda) y para la componente z de la velocidad promediada en el eje vertical (derecha), de las simulaciones T4 (arriba), A2 (medio) y A3 (abajo). Cada gráfico ilustra una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

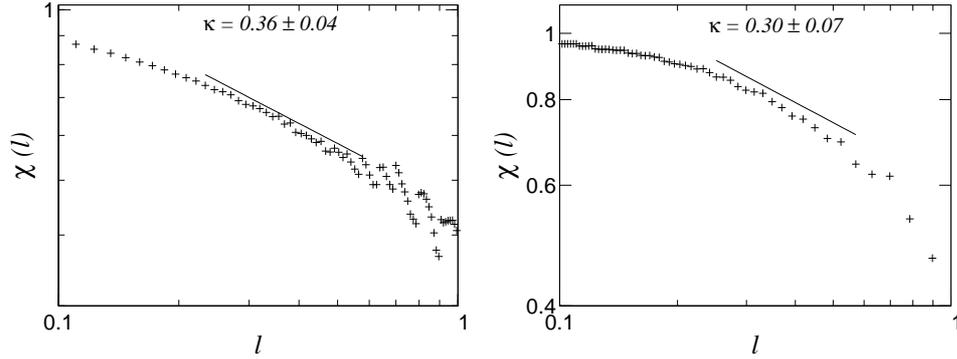


Figura 4.15: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para ω_z (izquierda) y para la componente z de la vorticidad promediada en el eje vertical (derecha), de las simulación A2. Cada gráfico ilustra una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

4.4. Promedios verticales

Los resultados presentados hasta ahora indican que v_z y ω_z son singulares de signo en flujos turbulentos rotantes, con las mismas leyes de escala y exponentes de cancelación. Esto es compatible con las teorías que predicen que en el límite de número de Rossby tendiendo a cero ambas cantidades satisfacen la misma ecuación dinámica, que corresponde a la ecuación del escalar pasivo en dos dimensiones. Sin embargo, estas teorías son para el promedio vertical de los campos, mientras que nosotros trabajamos con los campos en todo el volumen.

Para ser consistentes en la comparación deberíamos calcular el exponente de cancelación sobre magnitudes promediadas verticalmente. Por ese motivo, en esta sección mostramos resultados del exponente de cancelación κ al ser calculado a partir de campos promediados en la dirección paralela al eje de rotación \hat{z} .

En la figura 4.14 mostramos $\chi(l)$ para el campo v_z de las simulaciones T4, A2 y A3 (izquierda) y $\chi(l)$ calculado a partir del campo \bar{v}_z de las simulaciones T4, A2 y A3 (derecha), donde \bar{v}_z representa el promedio en la dirección vertical (paralela al eje de rotación) de la componente z del campo de velocidad.

Los valores obtenidos del exponente de cancelación que se muestran en la figura 4.14 son $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ para v_z y \bar{v}_z de la simulación T4, $\kappa = 0,35 \pm 0,04$ y $\kappa = 0,31 \pm 0,07$ respectivamente para v_z y \bar{v}_z de la simulación A2, y $\kappa =$

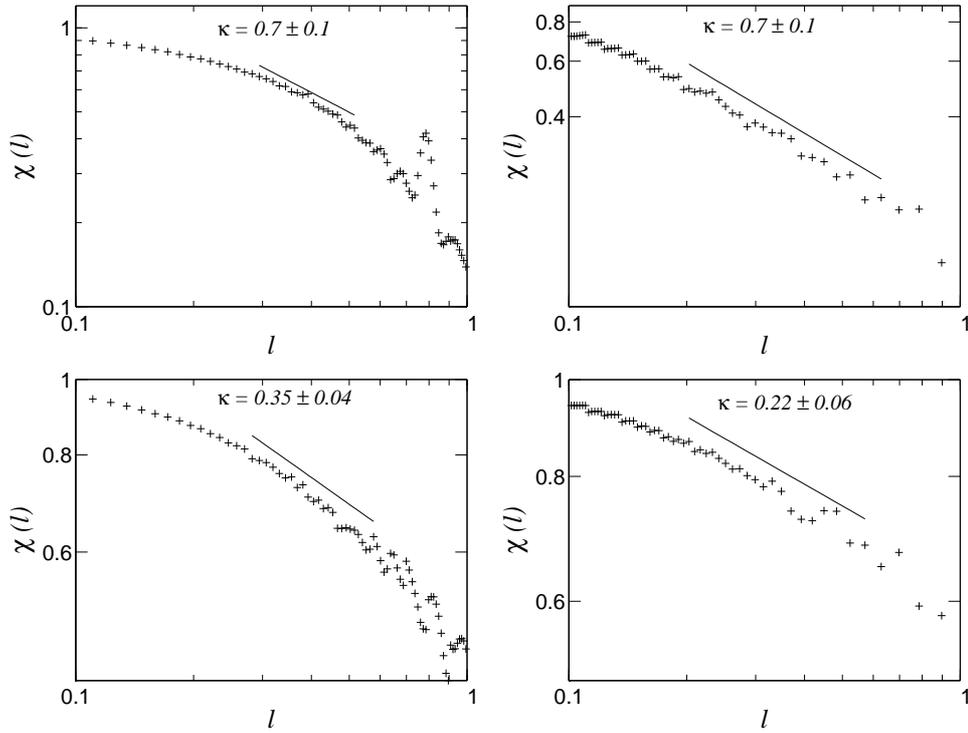


Figura 4.16: Función de partición χ en función de la escala l en escala logarítmica, para H (izquierda) y H promediada en el eje vertical (derecha), de las simulaciones T4 (arriba), A2 (abajo). Cada gráfico ilustra una línea recta indicando la pendiente de la función para valores donde el rango es inercial. El valor de la pendiente representa el exponente de cancelación κ indicado en la parte superior de cada gráfico.

$0,31 \pm 0,03$ y $\kappa = 0,25 \pm 0,06$ para v_z y \bar{v}_z de la simulación A3. Observamos que para todas las simulaciones el valor del exponente de cancelación κ coincide dentro de las barras de error para v_z y para \bar{v}_z . Al haber rotación, el flujo se vuelve fuertemente anisótropo, de manera que el campo sin promediar tiene un comportamiento similar al campo promediado en \hat{z} .

Presentamos en la figura 4.15 $\chi(l)$ para el campo de vorticidad ω_z en la simulación A2 (izquierda) y $\chi(l)$ para el campo $\bar{\omega}_z$, donde $\bar{\omega}_z$ representa el promedio en la dirección vertical (paralela al eje de rotación) de la componente z del campo de vorticidad. Los valores del exponente de cancelación resultantes son $\kappa = 0,36 \pm 0,04$ y $\kappa = 0,30 \pm 0,07$ para ω_z y $\bar{\omega}_z$.

Finalmente, en la figura 4.16 mostramos $\chi(l)$ para el campo H de las simulaciones T4 y A2, y $\chi(l)$ para \bar{H} de las mismas simulaciones, con \bar{H} el promedio en la dirección vertical (paralela al eje de rotación) de la helicidad. Los exponentes de cancelación de la helicidad son $\kappa = 0,7 \pm 0,1$ para H y \bar{H} de la simulación T4, y $\kappa = 0,35 \pm 0,04$ para H y $\kappa = 0,22 \pm 0,06$ para \bar{H} de la simulación A2.

Al analizar los resultados obtenidos para el exponente de cancelación en las simulaciones de flujo turbulento con rotación, vale la pena remarcar que obtenemos el mismo valor de κ para los campos v_z , ω_z y H , y para los campos promediados a lo largo del eje de rotación z en todas las simulaciones. Esto se debe a lo explicado anteriormente: al haber rotación, el flujo sufre a una bidimensionalización, y mientras menor sea el número de Ro mayor será el acuerdo de los resultados con los obtenidos para el campo promediado en la dirección del eje de rotación.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo calculamos el exponente de cancelación para poder estudiar la variación en el signo de una magnitud en distintas escalas a partir de datos provenientes de simulaciones directas de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de conservación de momento en un sistema rotante, para un volumen $(2\pi)^3$ con condiciones de contorno periódicas. Se utilizaron simulaciones de flujos excitados con dos tipos de mecanismos forzantes distintos; estos son: forzado de Arnold-Beltrami-Childress (ABC) y de Taylor-Green (TG). Analizamos simulaciones con 512 y 1536 puntos lineales de grilla, con números de Reynolds entre 1100 y 5100. Las simulaciones con rotación tienen número de Rossby entre $\approx 0,06$ y 10.

Calculamos el exponente de cancelación para las componentes cartesianas del campo de velocidad y de vorticidad, y para la helicidad. Para calcular el exponente de cancelación desarrollamos un código paralelo permitiendo el análisis de simulaciones numéricas directas mediante un cluster con memoria distribuida. El número de procesadores utilizado para el análisis varió entre 24 y 96.

Para las simulaciones con rotación nula o despreciable encontramos que el exponente de cancelación κ para las componentes cartesianas x , y , y z de la velocidad es similar en sus tres componentes. El rango de escalas en el cual existe una clara ley de potencias para la función de partición es considerablemente menor que el rango en donde el espectro de energía es aproximadamente inercial, con lo cual no podemos afirmar que las componentes del campo de velocidad son singulares de signo. Para el caso de las componentes del campo de vorticidad, al igual que la velocidad, las tres componentes son similares y satisfacen una ley de potencias en un rango menor que el rango inercial de la energía, solo que en este caso una ley de potencias ajusta con menor error a la función de partición.

En las simulaciones con rotación obtuvimos una diferencia apreciable en

el valor del exponente de cancelación para las componentes horizontales (perpendiculares al eje de rotación) y la componente vertical (paralela al eje de rotación) del campo de velocidad y vorticidad. De hecho, para el caso de las componentes horizontales no se encontró una clara ley de potencias en un rango lo suficientemente grande como para poder afirmar que existe una ley de escala sobre estas magnitudes, y en el caso particular de las componentes horizontales de la velocidad el valor del exponente de cancelación encontrado es del orden de su error.

La componente vertical de los campos de velocidad y vorticidad para las simulaciones con rotación muestra una clara ley de escala en la función de partición $\chi(l)$ en un rango de escalas comparable al rango en que la energía es aproximadamente inercial. Además, los valores del exponente de cancelación del campo de velocidad y de vorticidad para la componente z resultan iguales dentro de las barras de error para cada simulación (distinguiendo las simulaciones con y sin helicidad).

Esto es compatible con las teorías que predicen que en el límite de número de Rossby tendiendo a cero ambas cantidades promediadas en la dirección del eje de rotación satisfacen la misma ecuación dinámica, que corresponde a la del escalar pasivo.

La rotación afecta el flujo de manera que en el límite de $Ro \rightarrow 0$ la componente perpendicular al eje de rotación del campo se comporta como en un flujo bidimensional, mientras que la velocidad vertical (dirección a lo largo del eje de rotación) satisface la ecuación de un escalar pasivo, lo que significa que tiene una dinámica independiente a la componente horizontal, y en el límite de número de Reynolds infinito, su varianza es un invariante en el rango inercial.

Sin embargo, estas teorías son válidas para el promedio vertical de los campos, por lo cual comparamos también el exponente de cancelación de las componentes verticales del campo de velocidad y vorticidad calculados a partir del campo promediado en la dirección vertical, con la componente vertical del campo sin promediar. Los valores del exponente de cancelación de la componente vertical del campo de velocidad y vorticidad son, dentro del error, los mismos si se calculan para el campo tridimensional o para su promedio vertical.

Hallamos que la helicidad se ajusta a una ley de potencias en todas las simulaciones, variando en el rango de escalas según la simulación. Lo cual es compatible con que la helicidad se conserva en el rango donde la energía es inercial y en el límite de Re infinito es un invariante en dicho intervalo.

Finalmente, obtuvimos información de la geometría de las estructuras correlacionadas de los campos en los cuales existe una ley de escalas, mediante un análisis geométrico, y usando el valor del exponente de cancelación

y del exponente de Holder de la velocidad. Encontramos en varios casos valores cercanos a uno para la dimensión fractal de las estructuras, lo cual es compatible con estructuras con forma de columna.

El uso del exponente de cancelación resulta una herramienta útil para identificar comportamientos en un flujo turbulento que serían difíciles de obtener estudiando solamente las leyes de escala seguidas por los espectros o las funciones de correlación y de estructura. Para ahondar en el entendimiento del comportamiento en los cambios bruscos de signo de los campos de velocidad y vorticidad en conjunto con la helicidad en flujos turbulentos con rotación, entendemos necesario el estudio sobre simulaciones con mayor cantidad de puntos de grilla y mayor número de Reynolds, de manera de poder describir en forma mas completa los campos, identificar comportamientos asintóticos, y acercarnos más al límite de Reynolds infinito.

Bibliografía

- [1] A. Alexakis, B. Bigot, H. Politano, y S. Galtier, Anisotropic fluxes and nonlocal interactions in magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E* 76, 056313 (2007).
- [2] A. Babin, A. Mahalov y B. Nicolaenko, Global splitting, integrability and regularity of three-dimensional Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 15, 291–300 (1996).
- [3] J. Baerenzung, P. Mininni, A. Pouquet, H. Politano y Y. Ponty, Spectral modeling of rotating turbulent flows. *Phys. Fluids* 22, 025104 (2008).
- [4] G.K. Batchelor, Kolmogoroff’s theory of locally isotropic turbulence, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43, 533–59 (1947).
- [5] G.K. Batchelor, The role of big eddies in homogeneous turbulence, *Proc. R. Soc. Lond. A* 195, 513–32 (1949).
- [6] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [7] L. Biferale y V. Massimo, Isotropy vs anisotropy in small-scale turbulence, *Phys. Fluids* 13, 2139 (2001).
- [8] L. Biferale y F. Toschi, Anisotropic Homogeneous Turbulence: Hierarchy and Intermittency of Scaling Exponents in the Anisotropic Sectors, *Phys. Rev. Lett.* 86, 4831 (2001).
- [9] G. J. Boer y T. G. Shepherd, Large-Scale Two-Dimensional Turbulence in the Atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 40, 164–184 (1983).
- [10] M. D. Love, Subgrid modelling studies with Burgers’ equation, *J. Fluid Mech* 100, 87-110 (1980).
- [11] C. Cambon, N. N. Mansour y F. S. Godeferd, Energy transfer in rotating turbulence, *J. Fluid Mech.* 337, 303-332 (1997).

- [12] C. Cambon y L. Jacquin, Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation, *J. Fluid Mech.* 202, 295–317 (1989).
- [13] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni y T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer, New York, 1988).
- [14] V. Carbone y R. Bruno, Sign singularity of the magnetic helicity from in situ solar wind observations. *Astrophys. J.* 488, 482E487 (1996).
- [15] Q. Chen, S. Chen, G. L. Eyink y D. D. Holm, Resonant interactions in rotating homogeneous two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* 542, 139-164 (2005).
- [16] A. D. D. Craik, *Wave Interactions and Fluid Flows* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [17] P. F. Embid y A. J. Majda, Averaging over fast gravity waves for geophysics flows with arbitrary potential vorticity, *Commun. Partial Diff. Equat.* 21, 619–658 (1996).
- [18] T. E. Faber, *Fluid Dynamics for physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [19] G. Falkovich y K. R. Sreenivasan, Lessons from Hydrodynamic Turbulence, *Phys. Today* 59, 43 (2006).
- [20] U. Frisch y S. A. Orszag, Turbulence: Challenges for Theory y Experiment, *Phys. Today* 43, 24 (1990).
- [21] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [22] J. P. Graham, P. Mininni y A. Pouquet, Cancellation exponent and multifractal structure in two-dimensional magnetohydrodynamics: Direct numerical simulations and Lagrangian averaged modeling, *Phys. Rev. E* 72, 045301(R) (2005).
- [23] H. P. Greenspan, *The theory of rotating fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).
- [24] D. O. Gomez, P. D. Mininni y P. Dmitruk, MHD simulations y astrophysical applications. *Advances in Space Research* 35, 899-907 (2005).
- [25] D. O. Gomez, P. D. Mininni y P. Dmitruk, Parallel Simulations in Turbulent MHD. *Physica Scr.* 2005, 123-127 (2005).

- [26] D. Gottlieb, S. A. Orszag, A. Quarteroni y T. A. Zang, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Application* (SIAM, Philadelphia, 1977).
- [27] D. Gottlieb, M. Y. Hussaini y S. A. Orszag, *Spectral Methods for Partial Differential Equations* (Springer, New York, 1984).
- [28] S. Grossmann, D. Lohse y A. Reeh, Application of extended self-similarity in turbulence, *Phys. Rev. E* 56, 5473-5478 (1997).
- [29] M. Hossain, Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation, *Phys. Fluids* 6, 1077 (1994).
- [30] P. Imazio y P. Mininni, Cancellation exponents in helical and non-helical flows, *J. Fluid Mech.* 651, 241-250 (2010).
- [31] T. Ishihara, T. Gotoh y Y. Kaneda, Study of High-Reynolds Number Isotropic Turbulence by Direct Numerical Simulation, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 41, 165-180 (2009).
- [32] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura y A. Uno, Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulation of turbulence in a periodic box, *Phys. Fluids* 15, L21 (2003).
- [33] T. Karman y L. Howarth, On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* 164, 192-215 (1938).
- [34] B. W. Kerr y G. L. Darkow, Storm-relative winds and helicity in the tornadic thunderstorm environment, *Weath. and Forecast* 11, 489 (1996).
- [35] E. M. King, S. Stellmach, J. Noir, U. Hansen y J.M. Aurnou, Boundary layer control of rotating convection systems, *Nature* 457, 301-304 (2009).
- [36] R. H. Kraichnan, The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 5, 497 (1959).
- [37] R. H. Kraichnan, Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence, *Phys. Fluids* 8, 1385 (1965).
- [38] R. H. Kraichnan, Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* 47, 525 (1971).
- [39] R. H. Kraichnan, Two- and three-dimensional turbulent energy transfer, *J. Atmos. Sci.* 33, 1521 (1976).

- [40] A.N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids at very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, 299-303 (1941).
- [41] A.N. Kolmogorov, On the degeneration of isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 31, 538–541 (1941).
- [42] A.N. Kolmogorov, Dissipation of energy in isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 32, 19–21 (1941).
- [43] C. Lamriben, P.P. Cortet y F. Moisy, Direct measurements of anisotropic energy transfers in a rotating turbulence experiment, *Phys. Rev. Lett.* 107, 024503 (2011).
- [44] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics: Course of Theoretical Physics* (USSR Academy of Sciences, Moscow, 1987).
- [45] S. Liu, C. Meneveau y J. Katz, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet, *J. Fluid Mech.* 275, 83-119 (1994).
- [46] C. Meneveau y J. Katz, Scale-Invariance and Turbulence Models for Large-Eddy Simulation, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 32, 1-32 (2000).
- [47] P. Mininni y A. Pouquet, Helicity cascade in rotating turbulence. *Phys. Rev. E* 79, 026304 (2009).
- [48] P. Mininni, A. Alexakis y A. Pouquet, Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers. *Phys. Fluids* 21, 015108 (2009).
- [49] P. Mininni y A. Pouquet, Rotating helical turbulence. Part I. Global evolution and spectral behavior. *Phys. Fluids* 22, 035105 (2010).
- [50] P. Mininni y A. Pouquet, Rotating helical turbulence. Part II. Intermittency, scale invariance and structures. *Phys. Fluids* 22, 035106 (2010).
- [51] P. Mininni, D. Rosenberg, R. Reddy y A. Pouquet, A hybrid MPI-OpenMP scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence. *Parallel Computing* 37, 16–326 (2011).
- [52] H. K. Moffatt, Transport effects associated with turbulence with particular attention to the influence of helicity, *Rep. Prog. Phys.* 46, 621 (1983).

- [53] S. A. Orszag y M. D. Kruskal, Formulation of the theory of turbulence, *Phys. Fluids* 11, 43 (1968).
- [54] A. Orszag, *Lecture on the statistical theory of turbulence* (Gordon and Breach, New York, 1973).
- [55] E. Ott, Y. Du, K. R. Screenivasan, A. Juneja y A. K. Suri, Sign-Singular Measures: Fast Magnetic Dynamos, and High-Reynolds-Number Fluid Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 69, 2654–2657 (1992).
- [56] E. N. Parker, *Cosmical magnetic fields* (Clarendon Press, New York 1979).
- [57] G. Patterson y S. A. Orszag, Spectral calculations of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing interactions, *Phys. Fluids* 14, 2538–2541 (1971).
- [58] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics* (2nd Edn Springer, New York, 1986).
- [59] A. Pouquet, P. Mininni, The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics, *Phil. Trans. R. Soc* 368, 1635-1662 (2010).
- [60] L.F. Richardson, *Weather prediction by numerical process* (Cambridge University Press, Cambridge, 1922).
- [61] L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, A. Noullez, H. Politano, A. Pouquet y P. Veltri, Analysis of cancellation in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. plasmas* 9, 89 (2002).
- [62] L. Sorriso-Valvo, V. Abramenko, V. Carbone, A. Noullez, H. Politano, A. Pouquet, P. Veltri y V. Yurchyshyn, Cancellations analysis of photospheric magnetic structures and flares, *Mem. S. A. It.* 74, 631 (2003).
- [63] S. Takehiro, M. Yamada, Y. Hayashi, Energy Accumulation in Easterly Circumpolar Jets Generated by Two-Dimensional Barotropic Decaying Turbulence on a Rapidly Rotating Sphere, *J. Atmos. Sci.* 64, 4084–4097 (2007).
- [64] S. Thalabard, D. Rosenberg, A. Pouquet y P. Mininni, Conformal Invariance in Three-Dimensional Rotating Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* 106, 204503 (2011).

- [65] F. Waleffe, The nature of triad interactions in homogeneous turbulence, *Phys. Fluids* 4, 350–363 (1992).
- [66] F. Waleffe, Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids* 5, 677 (1993).
- [67] G. P. Williams, Planetary Circulations: 1. Barotropic Representation of Jovian y Terrestrial Turbulence, *J. Atmos. Sci.* 35, 1399–1426 (1978).
- [68] Y. Zhou, Interacting Scales y Energy Transfer in Isotropic Turbulence, *Phys. Fluids* 5, 2511-2524 (1993).
- [69] Y. Zhou, A phenomenological treatment of rotating turbulence, *Phys. Fluids* 7, 2092 (1995).